Equazioni di secondo grado

Si dice che un'equazione è di secondo grado quando il grado massimo dell'incognita è 2.
In un'equazione di secondo grado, fatta eccezione per le monomie, compaiono anche i termini di grado inferiore (grado 1 e grado 0).
Proprio in base al numero di termini, le equazioni di secondo grado si possono classificare in equazioni complete e incomplete.
In ogni caso è necessario che a (coefficiente della x^2) sia diverso da zero altrimenti l'equazione non è di secondo grado.

Equazioni complete

Sono quelle in cui compaiono tre termini: il termine di secondo grado, il termine di primo grado e il termine noto. In questo caso quindi: $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$	$ax^2 + bx + c = 0$

Equazioni incomplete

SPURIE (c=0)	$ax^2 + bx = 0$
PURE (b=0)	$ax^2 + c = 0$
MONOMIE (b=c=0)	$ax^2 = 0$

COME SI RISOLVONO LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risoluzione equazioni complete

Questo tipo di equazioni si risolve con l'ausilio di una formula, la cosiddetta FORMULA RISOLUTIVA (scritta a lato). Per trovare le soluzioni, basta scrivere i coefficienti dell'equazione da risolvere al posto dei parametri a,b e c e svolgere i calcoli	$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
Se la b è pari si può applicare anche la FORMULA RISOLUTIVA RIDOTTA che consente calcoli un po' più semplici (specie quando la quantità dentro la radice non è un quadrato perfetto). Tale formula è nota anche come formula del DELTA QUARTI	$x_1, x_2 = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a}$

IL DELTA

La quantità all'interno della radice è di fondamentale importanza. Essa viene chiamata "delta" o "discriminante" e sancisce la natura delle soluzioni.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$ DELTA

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c$$ DELTA QUARTI

Se Δ>0	L'equazione ammette due soluzioni reali e distinte
Se Δ=0	L'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti (uguali). Si dice anche che ammette un'unica soluzione
Se Δ<0	L'equazione ammette due soluzioni non reali (si dicono "complesse coniugate"). Questo perché all'interno della radice quadrata, si avrebbe un numero negativo e una radice quadrata con radicando negativo non esiste in $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali)

Esempio di risoluzione di un'equazione completa

In questo caso
$a = +3$
$b = +7$
$c = -10$
Basterà quindi sostituire questi valori nella formula risolutiva e fare i calcoli.

$$3x^2 + 7x - 10 = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-10)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{6} x = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-7 - 13}{6} = -\frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{6}_3} = -\frac{10}{3}$$

$$x_2 = \frac{-7 + 13}{6} = \frac{\cancel{6}^1}{\cancel{6}_1} = 1$$

Esempio di risoluzione di un'equazione completa con formula ridotta

In questo caso

$a = 5$
$b = -4$
$c = -1$

La b è pari, quindi si può applicare la formula del delta quarti. Anche in questo caso, basta sostituire questi valori nella formula risolutiva e fare i calcoli.

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{2}_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{2}_1}\right)^2 - 5 \cdot (-1)}}{5}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 5}}{5} = \frac{2 \pm \sqrt{9}}{5}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 3}{5}$$

$$x_1 = \frac{2 - 3}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{2 + 3}{5} = \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{5}_1} = 1$$

Risoluzione equazioni incomplete

SPURIE Le spurie si risolvono mettendo in evidenza la x e applicando successivamente la legge di annullamento del prodotto. Questa legge afferma che un prodotto è uguale a zero se almeno uno dei fattori è nullo (cioè uguale a 0). LE EQUAZIONI SPURIE AMMETTONO SEMPRE UNA SOLUZIONE UGUALE A ZERO	$ax^2+bx=0$ $x(ax+b)=0$ Scindendo il prodotto si ottiene: $x=0; \quad ax+b=0$ Dalla prima uguaglianza si ottiene la soluzione $x_1=0$ (Soluzione nulla) Dalla seconda uguaglianza, si ricava la seconda soluzione. E' un'equazione di primo grado e come tale va risolta, isolando la x: $ax+b=0 \rightarrow x=-\frac{b}{a}$
PURE Le pure si risolvono isolando il termine con la x^2 ed estraendo da ambo i membri la radice quadrata. Attenzione! Se il radicando è negativo l'equazione non ammette soluzioni reali ma immaginarie. In questo caso si dice che è impossibile. N.B. LE EQUAZIONI PURE AMMETTONO SEMPRE SOLUZIONI OPPOSTE	$ax^2+c=0 \rightarrow ax^2=-c \rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$ $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ Valida solo se $-\frac{c}{a}\geq 0$ $x_1=-x_2$
MONOMIE Come si può facilmente verificare, le monomie ammettono l'unica soluzione x=0.	$ax^2=0 \rightarrow x^2=\frac{0}{a}=0$ $x=\pm\sqrt{0} \rightarrow x=0$

Nota. Le soluzioni di un'equazione vengono chiamate anche ZERI dell'equazione.

Esempio di risoluzione di due equazioni spurie

$3x^2-7x=0$ $x(3x-7)=0$ $x=0; \quad 3x-7=0$ $x=0 \rightarrow x_1=0$ $3x-7=0 \rightarrow 3x=7 \rightarrow x_2=\frac{7}{3}$	$2x^2-8x=0$ $2x(x-4)=0$ $2x=0; \quad x-4=0$ $2x=0 \rightarrow x=\frac{0}{2} \rightarrow x_1=0$ $x-4=0 \rightarrow x_2=4$

Esempio di risoluzione di due equazioni pure

$x^2-16=0 \rightarrow x^2=16$ $x=\pm\sqrt{16} \rightarrow x=\pm 4$ Soluzioni reali ed opposte	$4x^2+9=0 \rightarrow 4x^2=-9$ $x^2=\sqrt{-\frac{9}{4}}$ Impossibile. Soluzioni immaginarie

Equazioni di secondo grado riconducibili alla forma base

Negli esercizi, spesso capita di dover eseguire diversi calcoli prima di giungere alla forma base. Bisogna quindi svolgere prodotti, quozienti, prodotti notevoli, semplificazioni e anche somme algebriche. Una volta arrivati a questo punto, occorre riconoscere il tipo di equazione di secondo grado a cui si è pervenuti e applicare il procedimento adeguato

Esempi

Esempio 1

$$(x+1)^2+(x-2)^2=(x+1)(x+5)$$
$$x^2+1+2x+x^2+4-4x=x^2+5x+x+5$$
$$\cancel{x^2}^0 \cancel{+1}^0+2x+x^2+\cancel{4}^0-4x-\cancel{x^2}^0-5x-x-\cancel{5}^0=0$$
$$x^2-8x=0$$

Equazione spuria

$$x(x-8)=0$$
$$x=0 \rightarrow x_1=0$$
$$x-8=0 \rightarrow x_2=8$$

Esempio 2

$$4x^2-4x+1-(x^2-2x+1)=x^2-4+8$$
$$4x^2-4x+1-x^2+2x-1-x^2+4-8=0$$
$$2x^2-2x-4=0$$

Equazione completa

$$x^2-x-2=0$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$$
$$x_1=\frac{1-3}{2}=-\frac{2}{2}=-1$$
$$x_2=\frac{1+3}{2}=+\frac{4}{2}=+2$$

Equazioni di secondo grado a coefficienti frazionari

Si dice che un'equazione di secondo grado è a coefficienti frazionari se sono presenti frazioni che però non contengono la x al denominatore. Per risolvere un'equazione frazionaria occorre:

- Calcolare il minimo comune multiplo (che deve essere uguale nei due membri dell'equazione)
- Eliminare il minimo comune multiplo e svolgere moltiplicazioni e somme algebriche
- Risolvere l'equazione intera che ne deriva (Dopo aver individuato a quale tipo di equazione di secondo grado corrisponde)

Esempio di risoluzione di un'equazione frazionaria

In questa equazione frazionaria, come prima cosa, bisogna fare il minimo comune multiplo

$$\frac{x^2-4}{3}+\frac{3x-6}{2}=\frac{x+1}{3}-1$$

$$\frac{2\left(x^2-4\right)+3(3x-6)}{6}=\frac{2(x+1)-6}{6}$$

$$\frac{2x^2-8+9x-18}{\cancel{6}^{1}}=\frac{2x+2-6}{\cancel{6}^{1}}$$

$$2x^2+7x-22=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot 2\cdot(-22)}}{2\cdot 2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+176}}{4}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{225}}{4}=\frac{-7\pm 15}{4}$$

$$x_1=\frac{-7-15}{4}\rightarrow -\frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{4}^{2}}=-\frac{11}{2}$$

$$x_2=\frac{-7+15}{4}\rightarrow +\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}^{1}}=+2$$

Equazioni di secondo grado fratte

Un'equazione di secondo grado, si definisce fratta quando l'incognita x compare al denominatore. Il procedimento è del tutto analogo a quello applicato alle equazioni frazionarie, ma essendo presente la x al denominatore, una volta eliminato quest'ultimo, bisogna imporre le condizioni. Bisogna cioè imporre diverso da zero, ciascun fattore del minimo comune multiplo che contiene la x.

Riepilogando, occorre:

- Calcolare il minimo comune multiplo (che deve essere uguale nei due membri)
- Eliminare il minimo comune multiplo imponendo le condizioni (vedi esempio)
- Svolgere moltiplicazioni e somme algebriche
- Risolvere l'equazione intera che ne deriva (Dopo aver individuato a quale tipo di equazione di secondo grado corrisponde)

Esempio di equazione fratta e condizioni

$$\frac{x-1}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}=-\frac{6}{5}$$

Bisogna scomporre i denominatori e fare il *mcm*

$$\frac{x-1}{(x+3)(x-3)}+\frac{1}{x-3}=-\frac{6}{5}$$

$$\frac{5(x-1)+5(x+3)}{\cancel{5(x+3)(x-3)}}=-\frac{6(x+3)(x-3)}{\cancel{5(x+3)(x-3)}}$$

$$5x-5+5x+15=-6\left(x^2-9\right)$$

$$5x-5+5x+15=-6x^2+54$$

$$5x-5+5x+15+6x^2-54=0$$

$$\cancel{6}^{3}x^2+\cancel{10}^{5}x-\cancel{44}^{22}=0$$

$$3x^2+5x-22=0$$ Equazione completa

$$x_1,x_2=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot(-22)}}{2\cdot3}$$

$$x_1,x_2=\frac{-5\pm\sqrt{25+264}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{289}}{6}=\frac{-5\pm17}{6}=$$

$$x_1=\frac{-5-17}{6}=-\frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{6}^{3}}=-\frac{11}{3}$$ Accettabile

$$x_2=\frac{-5+17}{6}=\frac{\cancel{12}^{2}}{\cancel{6}^{1}}=2$$ Accettabile

Condizioni di esistenza

Prima di eliminare il *mcm*, bisogna imporre le condizioni. Si impone quindi ciascun fattore del *mcm* che contiene la x diverso da 0.

$$x+3\neq0\rightarrow x\neq-3$$
$$x-3\neq0\rightarrow x\neq+3$$

Se una soluzione dovesse dare +3 o -3 non sarebbe accettabile. Sarebbe "buona" solo l'altra soluzione (a patto che sia diversa da questi due valori).

Se entrambe le soluzioni dovessero essere uguali a ±3 l'equazione sarebbe impossibile

Nota. Occorre ricordare che un'equazione di secondo grado è impossibile, non solo quando entrambe le soluzioni sono in "conflitto" con le condizioni di esistenza, ma anche quando il delta (Δ) o discriminante è negativo

Equazioni di secondo grado letterali	
Un'equazione si dice letterale se, oltre all'incognita (generalmente individuata con la lettera x), compaiono altre lettere. In questo caso le lettere che non rappresentano l'incognita, sono da trattare come semplici numeri. Rispetto a quelle numeriche, le equazioni letterali presentano più difficoltà in quanto non tutti i termini sono sommabili, perciò occorre fare raccoglimenti e seguire in generale procedimenti più laboriosi. Inoltre, come si vedrà a breve, è necessario "discutere" le soluzioni.	
$a^2x(3x-2)+ax(3x+1)-2ax=-x$ $3a^2x^2-2a^2x+3ax^2+ax-2ax=-x$ $3a^2x^2+3ax^2-2a^2x-ax+x=0$ $(3a^2+3a)x^2+(-2a^2-a+1)x=0$ $x[(3a^2+3a)x+(-2a^2-a+1)]=0$ $x_1=0 \rightarrow$ Soluzione uguale a zero (spuria) $(3a^2+3a)x+(-2a^2-a+1)=0$ $(3a^2+3a)x=2a^2+a-1$ $x=\frac{2a^2+a-1}{(3a^2+3a)}=\frac{(2a-1)\cancel{(a+1)}^1}{3a\cancel{(a+1)}^1}$ $x_2=\frac{2a-1}{3a}$ Seconda soluzione Condizioni: $a+1\neq 0 \rightarrow a\neq -1$ $3a\neq 0 \rightarrow a\neq 0$	Ecco il procedimento: • Svolgere tutti i calcoli e portare tutto al primo membro • Sommare i termini simili • Raccogliere i termini contenenti x^2, poi quelli contenenti la x (se ce ne sono) e scrivere per ultimo il termine noto. • Individuare il tipo di equazione di secondo grado a cui si è giunti e risolverla In questo caso, l'equazione a cui si è arrivati è un'equazione spuria (incompleta). Si risolve perciò mettendo in evidenza la x e poi uguagliando a zero i due fattori ottenuti. Dalla prima uguaglianza si ottiene la soluzione nulla $x_1=0$. Dalla seconda si ottiene un'equazione letterale di primo grado in cui è stato possibile effettuare una semplificazione tra numeratore e denominatore. Anche in questo caso è bene imporre le condizioni che non riguardano l'incognita ma la parte letterale

Equazioni letterali fratte e discussione

Anche nel caso delle equazioni letterali fratte, occorre fare il minimo comune multiplo, svolgere i calcoli al numeratore e imporre le condizioni di esistenza prima di eliminare il denominatore

$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x}{x+a}=\frac{11}{3}$ $\frac{3(x+a)(x+a)+3x(x-a)}{3\cancel{(x-a)(x+a)}}=\frac{11(x-a)(x+a)}{3\cancel{(x-a)(x+a)}}$ $3\left(x^2+ax+ax+a^2\right)+3x^2-3ax=11\left(x^2-a^2\right)$ $3x^2+\cancel{3ax}+3ax+3a^2+3x^2\cancel{-3ax}=11x^2-11a^2$ $6x^2-11x^2+3ax+3a^2+11a^2=0$ $-5x^2+3ax+14a^2=0$ $5x^2-3ax-14a^2=0$ $x_1,x_2=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-4\cdot 5\cdot\left(-14a^2\right)}}{2\cdot 5}$ $x_1,x_2=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2+280a^2}}{10}=\frac{3a\pm\sqrt{289a^2}}{10}=\frac{3a\pm 17a}{10}$ $x_1=\frac{3a-17a}{10}=-\frac{\cancel{14}^{7}a}{\cancel{10}^{5}}=-\frac{7}{5}a$ $x_2=\frac{3a+17a}{10}=\frac{20a}{10}=2a$	Una volta fatto il *mcm* e imposto le condizioni, i denominatori si possono eliminare. Poiché le condizioni sono: $x\neq\pm a$ Entrambe le soluzioni sono accettabili se $a\neq 0$ Quest'ultima affermazione fa capire che, in alcuni casi, è necessario confrontare le soluzioni e le condizioni. Questo succede quando le soluzioni dipendono dal parametro

Confronto tra soluzioni e condizioni	
Supponiamo di essere arrivati alla soluzione a fianco	$x=2a+3$
E che le condizioni derivanti dal denominatore fossero queste a destra	$x\neq 1$ $x\neq -2$
A priori, non si sa se la quantità $2a+3$ sia diversa da 1 e −2. Occorre perciò confrontarle come si vede qui a fianco	$2a+3\neq 1$ $2a+3\neq -2$
Risolvendo queste due disuguaglianze rispetto alla a, si capisce quali sono i valori che quest'ultima non può assumere (in questo caso sono -1 e $-\frac{5}{2}$)	$2a+3\neq 1\rightarrow 2a\neq -3+1\rightarrow 2a\neq -2\rightarrow a\neq -1$ $2a+3\neq -2\rightarrow 2a\neq -3-2\rightarrow 2a\neq -5\rightarrow a\neq -\frac{5}{2}$

<table>
<tr><th colspan="2">Discussione completa di un’equazione di secondo grado</th></tr>
<tr><td>Sia, questa a lato, la soluzione dell’equazione letterale di cui si vuole fare la discussione</td><td>$$x=\frac{(a-1)(a+4)}{(a-1)(a-2)}$$</td></tr>
<tr><td>Sia inoltre, questa a fianco, una condizione che si ottiene eliminando il denominatore (minimo comune multiplo)</td><td>$$x\neq -2$$</td></tr>
<tr><td>Imponendo il denominatore della soluzione diverso da zero, si ottiene</td><td>$$a\neq 1 \text{ e } a\neq 2$$</td></tr>
<tr><td>Tornando alla soluzione scritta nella prima riga, semplificando, si ottiene quanto riportato a lato</td><td>$$x=\frac{\cancel{(a-1)}^{1}(a+4)}{\cancel{(a-1)}^{1}(a-2)}=\frac{a+4}{a-2}$$</td></tr>
<tr><td>A questo punto, si devono confrontare soluzione e condizione.
Si vede che, affinché la soluzione sia possibile, la a non deve valere zero</td><td>$$\frac{a+4}{a-2}\neq -2$$ $$\frac{a+4}{\cancel{(a-2)}^{1}}\neq -\frac{2(a-2)}{\cancel{(a-2)}^{1}}$$ $$a+4\neq -2a+4$$ $$a+2a\neq -4+4$$ $$3a\neq 0 \rightarrow a\neq 0$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">DISCUSSIONE. Sostituendo i valori “critici” di a nella soluzione (prima riga), si perviene alle conclusioni riportate qui sotto</td></tr>
<tr><td>Se $a=2$ e $a=0$
N.B. Si deve sostituire nella soluzione, PRIMA della semplificazione, ovvero nell’espressione: $$x=\frac{(a-1)(a+4)}{(a-1)(a-2)}$$</td><td>L’equazione è impossibile. Infatti sostituendo $a=0$ nella soluzione trovata, si ha $x=-2$ che non è accettabile per la condizione di esistenza (denominatore diverso da zero).
Sostituendo $a=2$, si ottiene invece $x=\frac{6}{0}$ che è un valore impossibile. Quindi anche questa soluzione non è accettabile</td></tr>
<tr><td>Se $a=1$</td><td>L’equazione è indeterminata. Sostituendo nella soluzione si ottiene infatti: $$x=\frac{0}{0}$$</td></tr>
<tr><td>Se $a\neq 0 \quad a\neq 1 \quad a\neq 2$</td><td>L’equazione è determinata e la soluzione è: $$x=\frac{a+4}{a-2}$$</td></tr>
</table>

Verifica delle soluzioni di un'equazione di secondo grado	
Anche per le equazioni di secondo grado esiste la possibilità di eseguire una verifica per stabilire se effettivamente le soluzioni trovate sono giuste, se sono cioè realmente gli "zeri" dell'equazione. Per fare questo basta sostituire al posto dell'incognita le soluzioni trovate. Se, in seguito alla sostituzione, si ottiene un'uguaglianza, la soluzione è verificata. Viceversa, se non si ottiene un'uguaglianza, il valore sostituito non è una soluzione dell'equazione.	
Se il risultato di tale sostituzione è 0=0, la soluzione trovata è corretta	Se il risultato non è 0=0, o comunque non è un'uguaglianza, la soluzione trovata non è corretta, non è uno zero dell'equazione

Esempio	
Si abbia l'equazione	$x^2-4x+3=0$
Per verificare se x =2, rappresenta una soluzione, si sostituisce 2 al posto della x nell'equazione assegnata. Come si vede non dà un'uguaglianza quindi x =2 **NON** rappresenta una soluzione dell'equazione assegnata	$(2)^2-4(2)+3=0$ $4-8+3=0$ $-1\neq 0$
Sostituendo 1 al posto della x, si ottiene l'uguaglianza 0=0. Perciò x =1 è una soluzione dell'equazione	$(1)^2-4(1)+3=0$ $1-4+3=0$ $0=0$