Relazioni tra soluzioni e coefficienti di un'equazione di secondo grado

Tra le soluzioni di un'equazione di secondo grado e i suoi coefficienti, esistono dei "legami" cioè delle relazioni molto utili. Nello schema sottostante sono riportate le principali

La somma delle soluzioni di un'equazione di secondo grado è uguale al rapporto, cambiato di segno, tra il coefficiente della x e il coefficiente della x^2	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
Il prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado è dato dal rapporto tra il termine noto e il coefficiente della x^2	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Dalle precedenti relazioni, si ricavano le formule seguenti

Un'equazione di secondo grado si può sempre scrivere nella forma a lato. s rappresenta la somma delle soluzioni e p il prodotto	$x^2 - sx + p = 0$
Un trinomio di secondo grado si può scomporre secondo la formula a fianco x_1 e x_2 sono soluzioni dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero il trinomio dato	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Grazie a queste relazioni, si possono risolvere una serie di esercizi come si vede dagli esempi qui sotto

Esempio 1. Data un'equazione e una sua soluzione, trovare l'altra soluzione senza utilizzare la formula risolutiva

Data l'equazione

$$3x^2 + 2x - 16 = 0$$

Sapendo che una delle soluzioni è x=2 trovare l'altra soluzione senza risolvere l'equazione.

N.B. In entrambi i casi a lato, è stato sostituito a x_1 il valore 2

Utilizzando la formula della somma si ha:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$2 + x_2 = -\frac{2}{3} \rightarrow x_2 = -\frac{2}{3} - 2$$

$$x_2 = \frac{-2-6}{3} = -\frac{8}{3}$$

Si arriva allo tesso risultato se, anziché la somma, si utilizza il prodotto

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow -\frac{16}{3} \rightarrow 2x_2 = -\frac{16}{3}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{16}{3}}{2} = -\frac{\cancel{16}^{8}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}} = -\frac{8}{3}$$

Esempio 2. Dati due numeri che rappresentano le soluzioni di un'equazione, trovare l'equazione "generatrice"	
Trovare un'equazione che ha come soluzioni i numeri qui a lato	$x_1 = -3$ $x_2 = +4$
Si ricavano somma e prodotto delle due soluzioni…	$x_1 + x_2 = -3 + 4 = +1 \quad \rightarrow \boldsymbol{s}$ $x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot (+4) = -12 \rightarrow \boldsymbol{p}$
…e si sostituiscono nella formula a fianco	$x^2 - sx + p = 0$
Ottenendo così l'equazione richiesta	$x^2 - x - 12 = 0$

Esempio 3. Dati somma e prodotto delle soluzioni di un'equazione, trovare l'equazione (ed eventualmente le soluzioni)	
Siano i due numeri a fianco la somma e il prodotto delle soluzioni	$s = -1 \qquad p = -30$
Per trovare l'equazione basta sostituirli nella formula a fianco.	$x^2 - sx + p = 0$
Risolvendo l'equazione si trovano anche le soluzioni (5 e -6)	$x^2 + x - 30 = 0$

Esempio 4. Di due numeri si conoscono somma e prodotto. Trovare i due numeri	
Siano i valori a lato, la somma e il prodotto di due numeri da determinare	$s = -\frac{1}{6} \rightarrow \boxed{\text{Somma}}$ $p = -\frac{1}{3} \rightarrow \boxed{\text{Prodotto}}$
Per trovare questi numeri, si sostituiscono i valori assegnati nella formula $x^2\text{-}sx\text{+}p\text{=}0$	$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$
Dopo aver fatto il minimo comune multiplo (che poi si elimina), si risolve l'equazione di secondo grado che ne deriva I numeri richiesti sono le soluzioni dell'equazione: $x_1 = -\frac{2}{3}$ $x_2 = +\frac{1}{2}$	$\frac{6x^2 + x - 2}{\cancel{6}^{1}} = 0$ $x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12}$ $x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12}$ $x_1 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}^{3}} = -\frac{2}{3}$ $x_2 = \frac{-1+7}{12} = \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{12}^{2}} = \frac{1}{2}$

Esempio 5. Scomporre un trinomio di secondo grado	
È dato il trinomio a lato	$4x^2 - 7x + 3$
Per scomporre il polinomio dato, si applica la formula a fianco. x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione associata	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Si risolve perciò l'equazione associata al trinomio assegnato	$4x^2 - 7x + 3 = 0$ $x_1, x_2 = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4}$ $x_1, x_2 = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8}$ $x_1 = \frac{7-1}{8} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}^{4}} = \frac{3}{4}$ $x_2 = \frac{7+1}{8} = \frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{8}^{1}} = 1$
Trovate le soluzioni, si sostituiscono nella formula precedente. Se è necessario si fa il minimo comune multiplo all'interno delle parentesi e, se è possibile, si semplifica con la quantità all'esterno delle parentesi	$4(x-1)\left(x - \frac{3}{4}\right)$ $\cancel{4}^{1}(x-1)\left(\frac{4x-3}{\cancel{4}^{1}}\right)$
La scomposizione richiesta sarà perciò questa a fianco	$4x^2 - 7x + 3 = (x-1)(4x-3)$
Nota	
Se il delta o discriminante della formula risolutiva è negativo, significa che il trinomio non è scomponibile	

Un'altra relazione importante che lega le soluzioni e i coefficienti di un'equazione è evidenziata dalla regola di Cartesio, come si vedrà nella scheda seguente

La regola di Cartesio	
La regola di Cartesio si basa su due concetti: permanenza e variazione. Se tra un coefficiente e l'altro di un'equazione di secondo grado il segno resta lo stesso, si ha una **permanenza**, se cambia si ha invece una **variazione**. Questi concetti sono fondamentali per capire quanto segue	
Secondo la regola di Cartesio, ad ogni variazione corrisponde una soluzione positiva, mentre ad ogni permanenza corrisponde una soluzione negativa.	**VARIAZIONE=SOLUZIONE POSITIVA** **PERMANENZA=SOLUZIONE NEGATIVA** Se la permanenza viene prima della variazione, la soluzione negativa sarà, in valore assoluto, maggiore di quella positiva. Viceversa se viene prima la variazione, la soluzione positiva sarà in valore assoluto, maggiore di quella negativa.
Grazie alla regola di Cartesio quindi, è possibile stabilire anticipatamente quali saranno i segni delle soluzioni di un'equazione di secondo grado senza risolverla, osservando semplicemente i suoi coefficienti. NOTA IMPORTANTE. Naturalmente il delta deve essere maggiore o uguale a zero altrimenti l'equazione è impossibile.	

Esempi	
Nell'equazione a lato, il delta è positivo e si hanno, come si vede, due variazioni. Infatti il primo termine è +5 mentre il secondo è −13. Quindi tra il primo e il secondo termine c'è una variazione di segno. Così pure tra il secondo e il terzo termine: −13 e +1. Le soluzioni saranno perciò entrambe positive	$5x^2 - 13x + 1 = 0$ $\Delta = 169 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 169 - 20 = 149 > 0$
Nell'equazione a lato il delta è positivo e si hanno una permanenza e una variazione. Si avrà quindi una soluzione negativa e una positiva e quella negativa sarà, in valore assoluto, maggiore di quella positiva	$7x^2 + x - 1 = 0$ $\Delta = 1 - 4 \cdot 7 \cdot (-1) = 1 + 28 = 29 > 0$
Nell'equazione a lato il $\Delta > 0$ e si ha una variazione e una permanenza. Si avrà quindi una soluzione positiva e una negativa e quella positiva in valore assoluto sarà maggiore di quella negativa	$3x^2 - 2x - 1 = 0$ $\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$