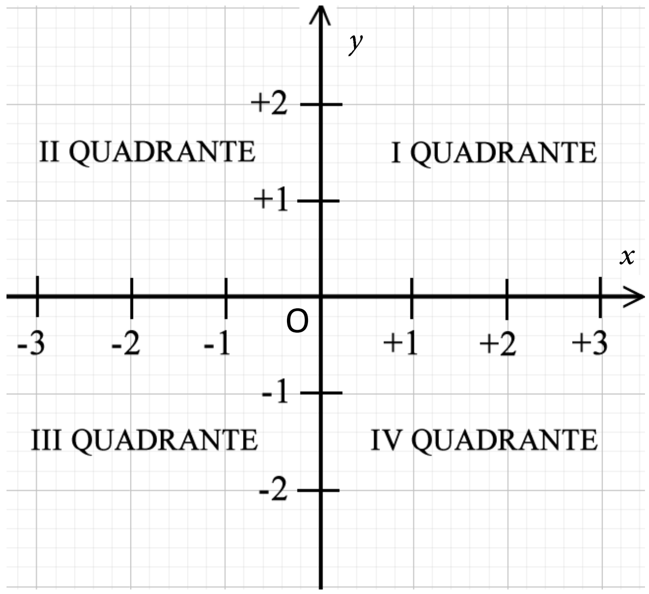
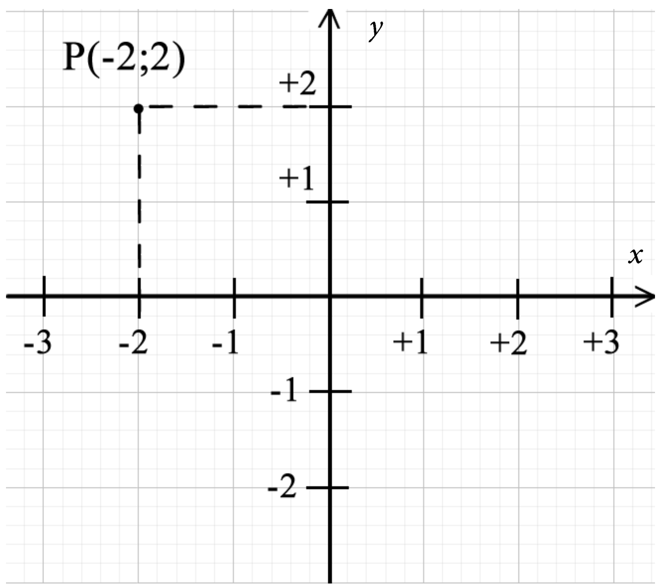
Introduzione alla geometria analitica

La geometria analitica studia le figure geometriche attraverso l'utilizzo di un sistema di assi detti "assi cartesiani". Questi sono formati da due rette perpendicolari che si incontrano nel punto O definito "origine" degli assi.
L'asse orizzontale viene indicato come asse x o asse delle ascisse, mentre quello verticale è l'asse y o asse delle ordinate.
Tali assi incontrandosi danno origine a quattro quadranti che vengono individuati come in figura.

I valori positivi sull'asse x si trovano a destra dell'origine, quelli negativi a sinistra. Sull'asse y, i valori positivi si trovano sopra l'origine, quelli negativi sotto. In generale diciamo che la freccia indica i valori crescenti delle due coordinate cartesiane.
Il primo quadrante è quello in cui le due coordinate sono positive, gli altri si determinano procedendo in senso antiorario



La posizione di un punto sugli assi cartesiani è definita dalle sue coordinate x e y. Essa è data dall'incontro delle perpendicolari agli assi passanti per le coordinate del punto stesso
La prima coordinata (ascissa) è sempre la x e la seconda coordinata (ordinata) è sempre la y.



Distanza tra due punti=Lunghezza di un segmento

Per calcolare la distanza tra due punti A e B, basta sostituire le coordinate dei due punti al posto delle x e delle y presenti nella formula a fianco (formula della distanza)

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Punto medio di un segmento

Il punto medio di un segmento è quel punto che lo divide in due parti uguali. In altre parole, è quel punto che si trova "in mezzo" al segmento.
Le sue coordinate si trovano grazie alla formula a lato

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Baricentro di un triangolo

Il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle sue mediane.
La formula a fianco permette di trovarlo in modo rapido

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Area di un triangolo con il metodo del determinante (Sarrus)

Un metodo per trovare in modo agevole l'area di un triangolo, è quello che prevede l'utilizzo del determinante, sfruttando la regola di Sarrus. Esso si costruisce in questo modo:
Le prime due colonne sono costituite dalle coordinate dei vertici del triangolo, la terza è una colonna di 1. Per rendere agevole il calcolo, si ripetono le prime due colonne nella parte destra del determinante stesso. Fatto ciò si procede con il calcolo seguendo questa regola:
Alla somma dei prodotti individuati dalle tre linee rosse occorre sottrarre la somma dei prodotti individuati dalle tre linee verdi

Sia ABC un triangolo di vertici:

$$A(x_1;y_1)\ B(x_2;y_2)\ C(x_3;y_3)$$

La sua Area si può trovare con la seguente formula

$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc|cc} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{array}\right|$$

$$A=\frac{1}{2}\left|x_1y_2+y_1x_3+x_2y_3-(x_3y_2+y_3x_1+x_2y_1)\right|$$

Calcolo della distanza tra due punti: esempio 1

Calcolare la distanza tra i due punti:

A(3;−2) e B(−1:5)

Basterà sostituire le coordinate dei due punti nella formula generale

Posto

$$A(x_1;y_1) \quad B(x_2;y_2)$$
$$\downarrow \ \downarrow \qquad \downarrow \ \downarrow$$
$$A(3;-2) \quad B(-1;5)$$

Si ha

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d=\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(5+2)^2}$$
$$d=\overline{AB}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

Calcolo del punto medio tra due punti: esempio 2

Calcolare il punto medio tra i due punti:

A(4;−2) e B(6:5)

Come per la distanza, basta sostituire le coordinate dei punti nella formula a fianco e svolgere i calcoli

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{4+6}{2};\frac{-2+5}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}^{1}};\frac{3}{2}\right)\rightarrow M\left(5;\frac{3}{2}\right)$$

Calcolo del baricentro di un triangolo: esempio 3

Calcolare il baricentro del triangolo di vertici:

A(0;1) e B(−3:4) C(3;−6)

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{0-3+3}{3};\frac{1+4-6}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{0}{3};\frac{-1}{3}\right)\rightarrow\left(0:-\frac{1}{3}\right)$$

Calcolo dell'area di un triangolo: esempio 4

Calcolare l'area
del triangolo di vertici

A(0;1), B(3:2), C(1;−4)

$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right|$$

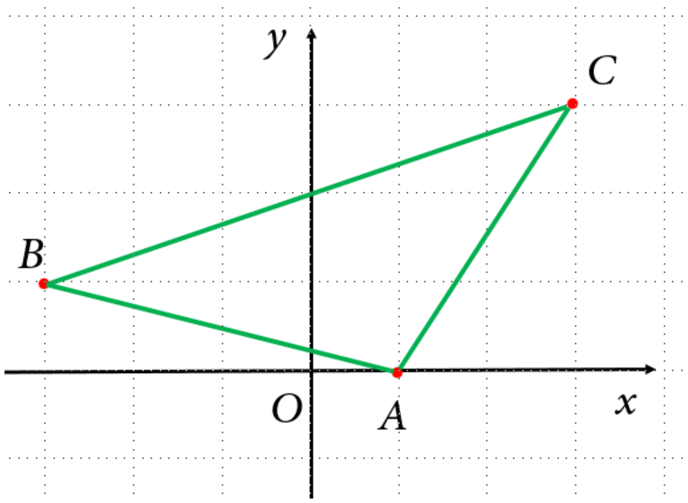
$$A=\frac{1}{2}\left|0\cdot2\cdot1+1\cdot1\cdot1+1\cdot3\cdot(-4)-(1\cdot2\cdot1-4\cdot1\cdot0+1\cdot3\cdot1)\right|$$

$$A=\frac{1}{2}\left|0+1-12-(2-0+3)\right|=\frac{1}{2}\left|-16\right|=\frac{1}{\cancel{2}_{1}}\cdot\cancel{16}^{8}=8$$

Esercizio

Determinare il perimetro del triangolo di vertici: $A(1;0)$ $B(-3;1)$ $C(3;3)$

Svolgimento



$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ → Distanza tra due punti

$$\overline{AB}=\sqrt{(1+3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(3+3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(1-3)^2+(0-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$P=\sqrt{17}+\sqrt{40}+\sqrt{13}$$

Perimetro