Funzioni goniometriche

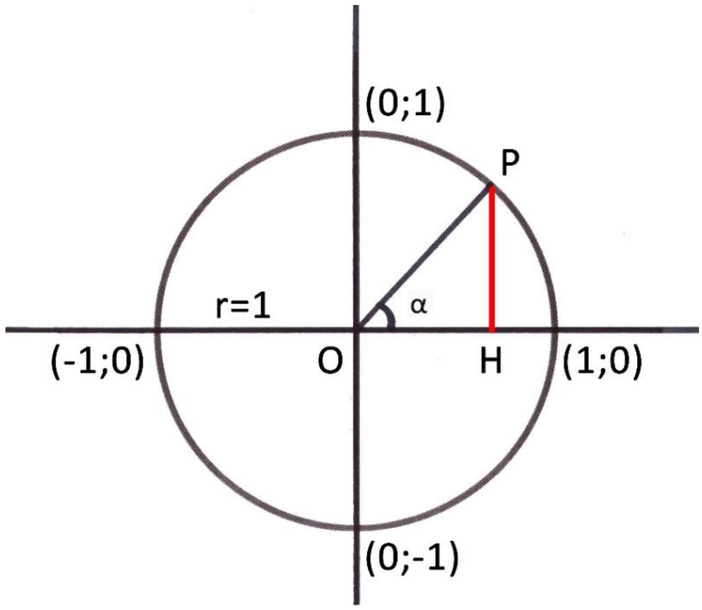
Ricordando che la circonferenza goniometrica è quella circonferenza che ha centro nell'origine e raggio 1, ecco le definizioni delle funzioni goniometriche

Seno di un angolo

Si definisce seno dell'angolo α il rapporto tra il cateto opposto ad α e l'ipotenusa.
Poiché l'ipotenusa $\overline{OP}$ è il raggio della circonferenza goniometrica e vale 1, ne deriva che il seno è uguale a PH (ordinata del punto P)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \frac{PH}{1}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = |PH|$$

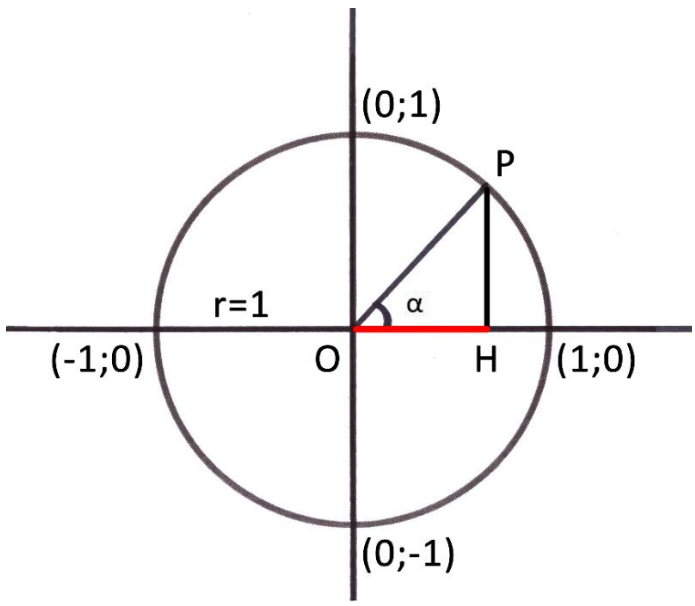


Coseno di un angolo

Si definisce coseno dell'angolo α il rapporto tra il cateto adiacente ad α e l'ipotenusa.
Il coseno è quindi l'ascissa del punto P

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{OH}{1}$$

$$\cos\alpha = |OH|$$



Poiché i cateti sono sempre minori dell'ipotenusa, ne consegue che le funzioni seno e coseno sono funzioni limitate e di valori compresi tra −1 e +1.
Entrambe sono dette "funzioni periodiche di 2π" in quanto, dopo tale intervallo, riassumono gli stessi valori

$$-1 \le sen\, x \le +1$$

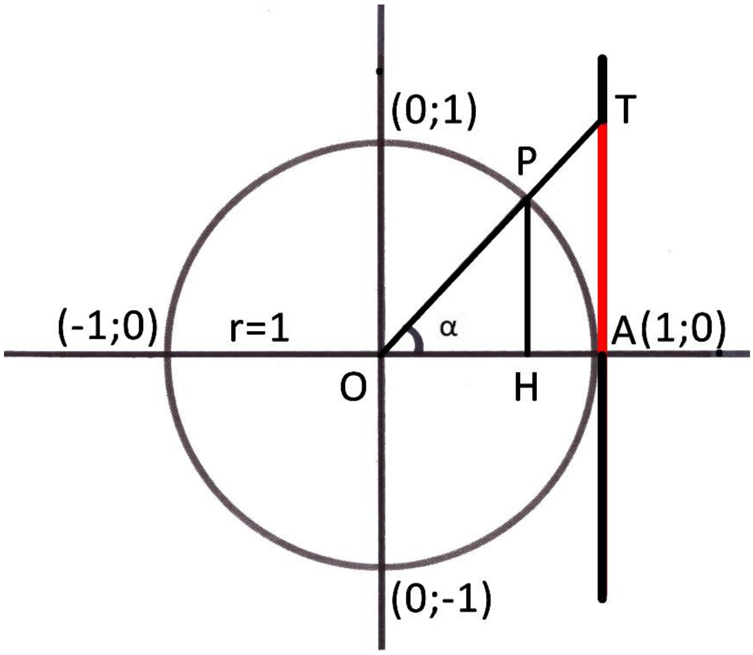
$$-1 \le \cos x \le +1$$

Tangente di un angolo

Si definisce tangente dell'angolo α il segmento di estremi $\overline{AT}$, dove A è il punto (1;0), mentre T è il punto di intersezione tra il prolungamento del raggio $\overline{OP}$ e la retta tangente alla circonferenza in A.
La tangente è data dal rapporto tra $sen\alpha$ e $cos\alpha$ ed è anche l'inverso della cotangente

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{ctg}\alpha}$$

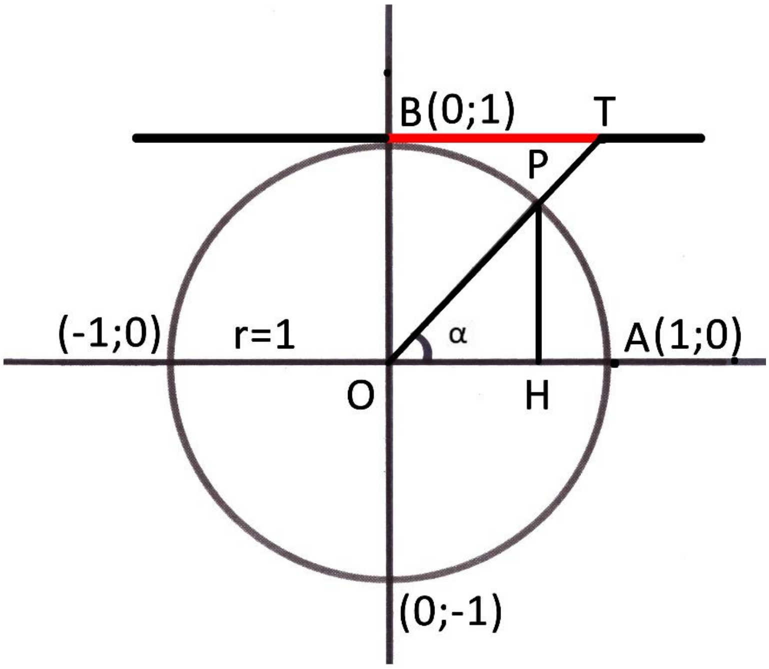


Cotangente di un angolo

Si definisce cotangente dell'angolo α il segmento di estremi $\overline{BT}$, dove B è il punto (0;1), mentre T è il punto di intersezione tra il prolungamento del raggio $\overline{OP}$ e la retta tangente alla circonferenza in B.
La cotangente è data dal rapporto tra $cos\alpha$ e $sen\alpha$ ed è l'inverso della tangente

$$\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$$

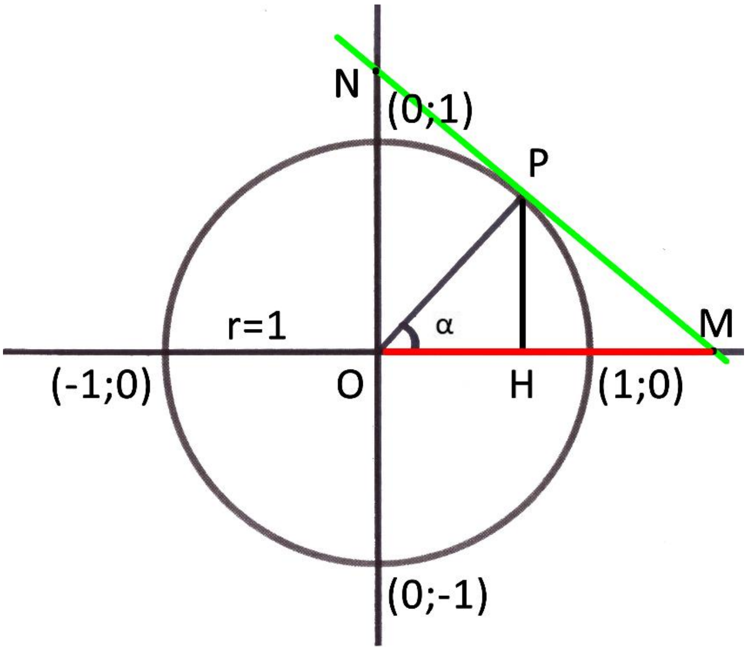


Anche tangente e cotangente sono funzioni "periodiche". Infatti dopo un intervallo pari a π (detto periodo), riassumono gli stessi valori. A differenza di seno e coseno, sono funzioni illimitate poiché possono assumere valori uguali a più o meno infinito (per esempio, man mano che P tende a 90° la tangente tende a infinito)

Secante di un angolo

Si definisce secante dell'angolo α, il segmento $\overline{OM}$, dove M è il punto di intersezione tra la retta tangente alla circonferenza nel punto P e l'asse x, mentre O è l'origine degli assi cartesiani.
La secante è l'inverso del coseno

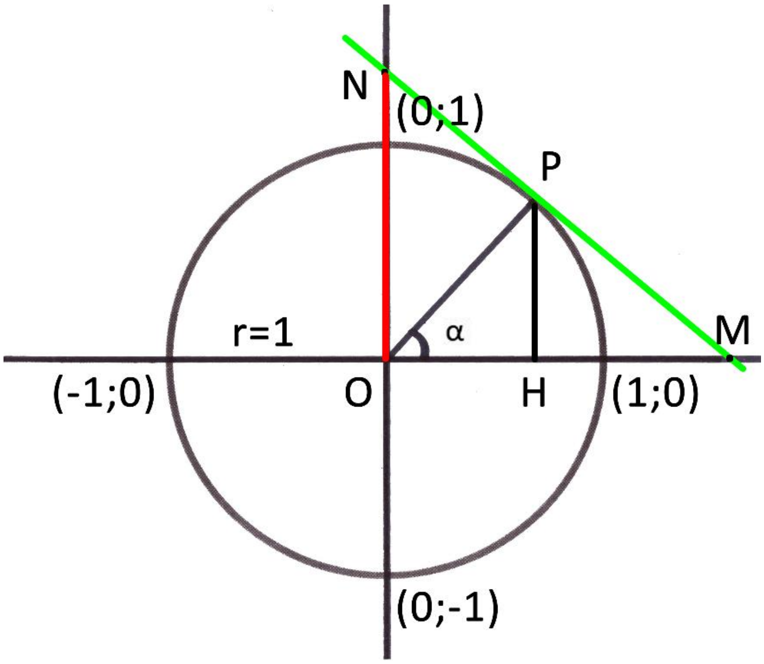
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$



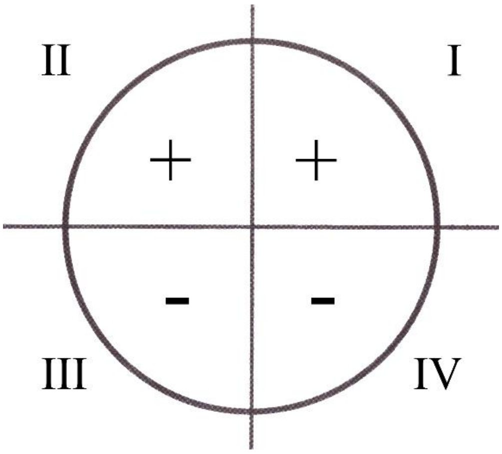
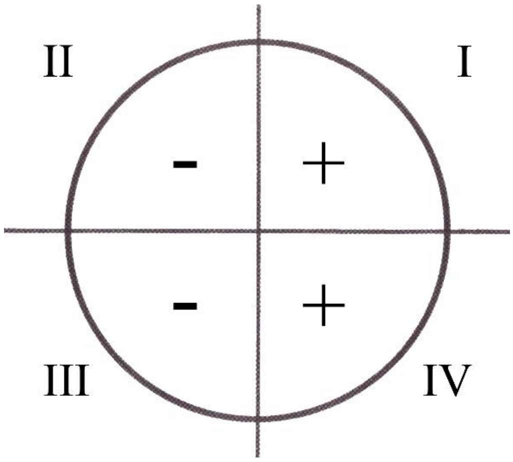
Cosecante di un angolo

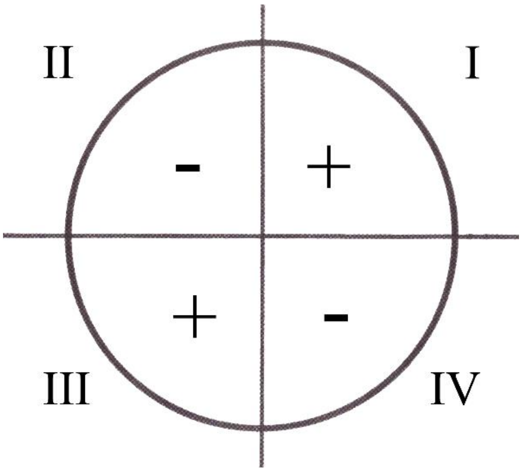
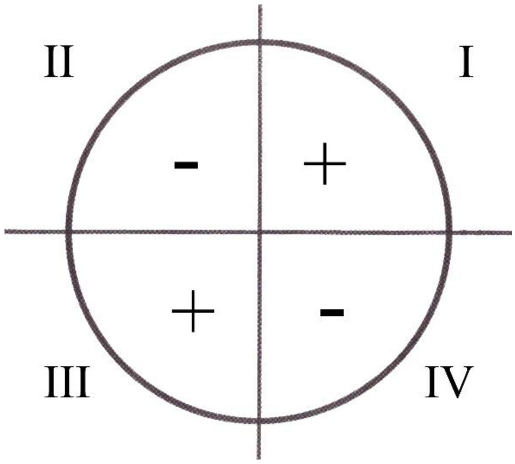
Si definisce cosecante dell'angolo α, il segmento $\overline{ON}$, dove N è il punto di intersezione tra la retta tangente alla circonferenza nel punto P e l'asse y, mentre O è l'origine degli assi cartesiani.
La cosecante è l'inverso della funzione seno

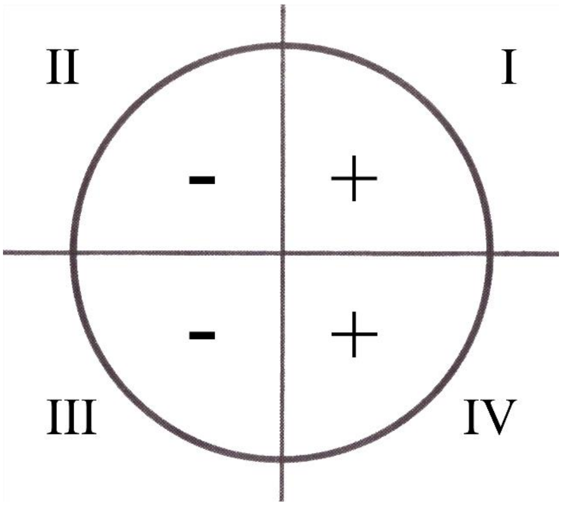
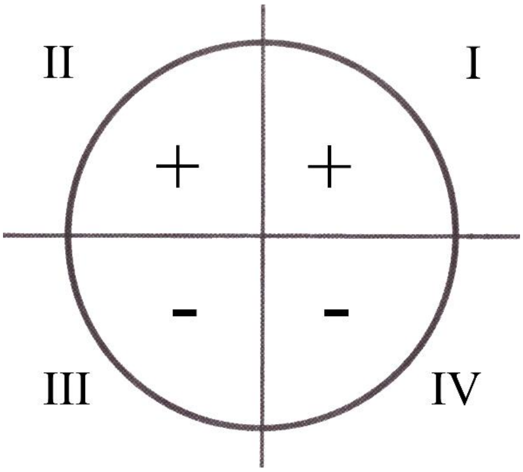
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$



Nota. Secante e cosecante sono funzioni periodiche di 2π e illimitate

Variazione segni **senα**	Variazione segni **cosα**
	

Variazione segni **tgα**	Variazione segni **ctgα**
	

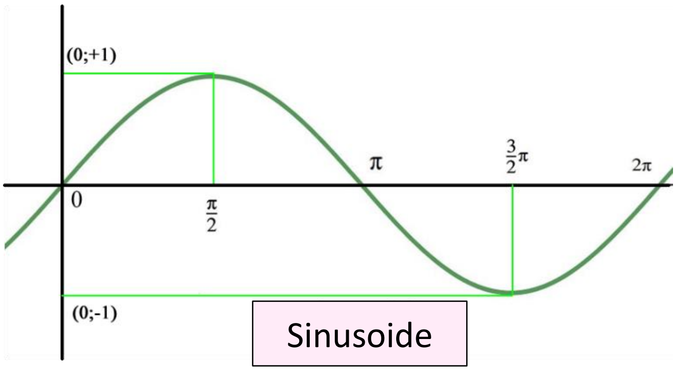
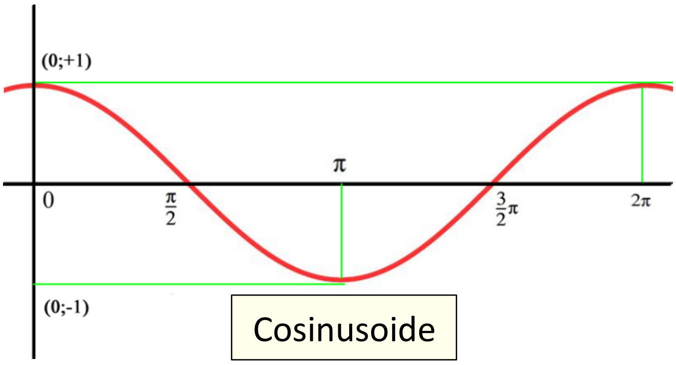
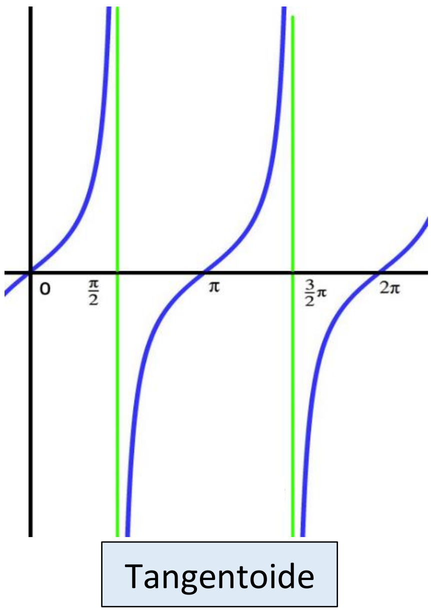
Variazione segni **secα**	Variazione segni **cosecα**
	

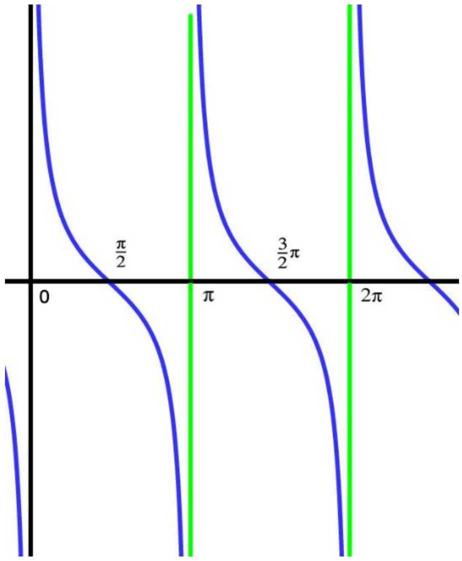
Attraverso opportuni passaggi, è possibile dimostrare che per le funzioni goniometriche esistono una serie di valori "principali" che sono più ricorrenti di altri e che è fondamentale memorizzare. Sono questi della tabella qui sotto

Tabella delle funzioni goniometriche per angoli noti

Gradi	Radianti	***seno***	***coseno***	***tangente***	***cotangente***
0°	**0**	0	+1	0	∞
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22°30'	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	+1	+1
54°	$\frac{3}{10}\pi$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
67°30'	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
72°	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
75°	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	+1	0	∞	0
180°	π	0	−1	0	∞
270°	$\frac{3}{2}\pi$	−1	0	∞	0
360°	2π	0	+1	0	∞
Gradi	Radianti	***seno***	***coseno***	***tangente***	***cotangente***

Come si vede, sono stati riportati alcuni valori noti del primo quadrante.
Altri valori ad essi "corrispondenti" tipo 120°, 150°, 210°, 330°, non sono presenti.
Il motivo è legato al fatto che, anziché ricordarli a memoria è preferibile ricavarli attraverso l'utilizzo delle formule sugli angoli associati che saranno spiegate nelle prossime schede

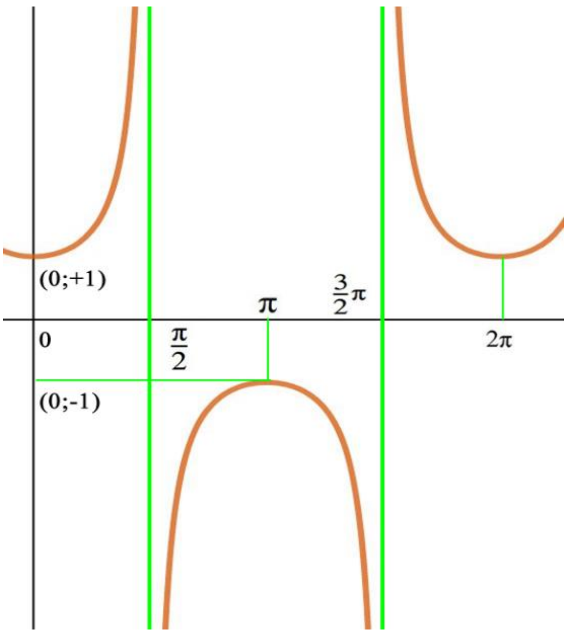
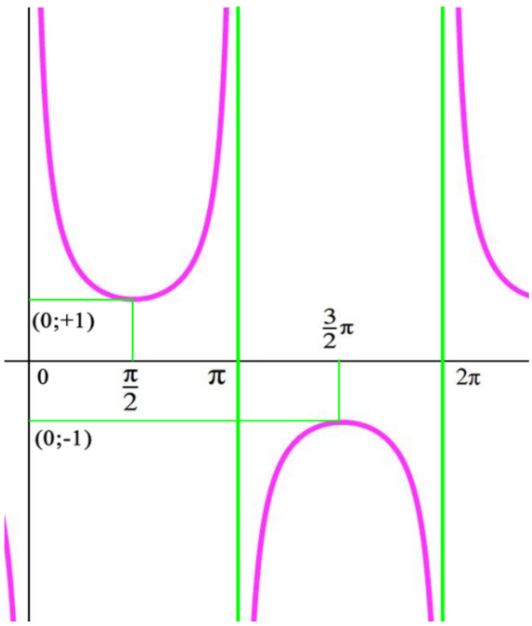
Andamento delle funzioni goniometriche: grafici	
$y = sen\,x \longrightarrow$ **Sinusoide**	
La sinusoide è la curva che, in coordinate cartesiane, rappresenta il diagramma della funzione seno. Si ottiene prendendo alcuni dei suoi punti principali e osservando gli intervalli di positività e negatività e di crescenza e decrescenza. Punti principali: $(0;0)\ \left(\frac{\pi}{2};1\right)\ (\pi;0)\ \left(\frac{3}{2}\pi;-1\right)\ (2\pi;0)$	
$y = cos\,x \longrightarrow$ **Cosinusoide**	
Si procede in modo analogo per tracciare la cosinusoide. Punti principali: $(0;1)\ \left(\frac{\pi}{2};0\right)\ (\pi;-1)\ \left(\frac{3}{2}\pi;0\right)\ (2\pi;1)$ N.B. Più valori si riportano (e quindi più punti), meglio è!	
$y = tg\,x \longrightarrow$ **Tangentoide**	
La tangentoide è la curva che, in coordinate cartesiane, rappresenta il diagramma della funzione tangente. Si ottiene Con lo stesso procedimento con cui si sono ottenute sinusoide e cosinusoide. Si tenga presente che, nell'intervallo (0;2π), la funzione presenta due asintoti verticali in $x = \frac{\pi}{2} \quad e \quad x = \frac{3}{2}\pi$ Gli asintoti sono rette a cui una funzione tende senza mai raggiungerle. Infatti, man mano che la x si avvicina a 90° la tangente tende a infinito (e l'infinito non è raggiungibile). Nella figura sono disegnati in verde	

$y = ctg\, x \longrightarrow$ **Cotangentoide**	
La cotangentoide è la curva che, in coordinate cartesiane, rappresenta il diagramma della funzione cotangente. Si arriva al grafico seguendo i procedimenti visti per i grafici precedenti. Nell'intervallo $(0;2\pi)$, la funzione presenta tre asintoti verticali in $x=0 \quad x=\pi \quad e \quad x=2\pi$	 Cotangentoide

Nota. Essendo la tangente e la cotangente funzioni periodiche di π, si sarebbe potuto tracciare il grafico nell'intervallo $(0;\pi)$ in quanto i valori poi si ripetono. Nell'intervallo successivo infatti $(\pi;2\pi)$ l'andamento è lo stesso come si vede dal grafico stesso.

Secantoide e Cosecantoide

Qua sotto i grafici della secante e della cosecante, detti secantoide e cosecantoide

Secantoide	Cosecantoide
	

Esercizio 1	
Risolvere l’espressione a lato	$6\text{sen}45° + 2\cos 30° + \text{tg}60° - 4\cos 60° - 2\text{ctg}30° - 3\sqrt{2} =$ $= \cancel{6}^{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}^{1}} + \cancel{2}^{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}^{1}} + \sqrt{3} - \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}^{1}} - 2 \cdot \sqrt{3} - 3\sqrt{2} =$ $= \cancel{3\sqrt{2}}^{0} + \cancel{\sqrt{3}}^{0} + \cancel{\sqrt{3}}^{0} - 2 - \cancel{2\sqrt{3}}^{0} - \cancel{3\sqrt{2}}^{0} = -2$

Esercizio 2	
Risolvere l’espressione a lato	$\text{tg}\pi - 2\cos\frac{\pi}{3} + 3\text{ctg}\frac{\pi}{3} - \cos\pi + 2\text{sen}\frac{\pi}{6} =$ $= 0 - \cancel{2}^{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}^{1}} + \cancel{3}^{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}^{1}} - (-1) + \cancel{2}^{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}^{1}} =$ $= \cancel{-1}^{0} + \sqrt{3}\cancel{+1}^{0} + 1 = \sqrt{3} + 1$