Disequazioni di secondo grado

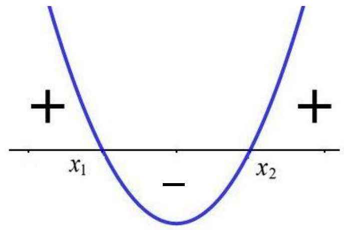
Il metodo più utilizzato per risolvere una disequazione di secondo grado, anche se non è l'unico, è quello della parabola. Un'equazione di secondo grado rappresenta infatti una parabola le cui intersezioni con l'asse x sono le soluzioni dell'equazione assegnata

Variazione del grafico della parabola

Se a>0 Concavità rivolta verso l'alto	***Se a<0*** Concavità rivolta verso il basso

Se $a>0$

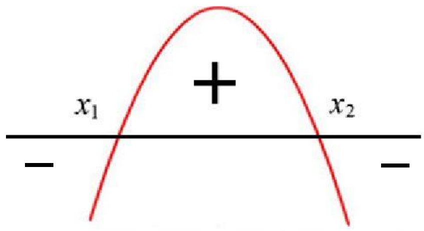
Δ>0 (2 soluzioni reali e distinte)



$$ax^2+bx+c>0 \quad per \quad x<x_1 \quad e \quad x>x_2$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad per \quad x_1<x<x_2$$

Se $a<0$

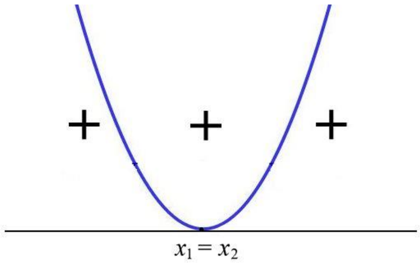
Δ>0 (2 soluzioni reali e distinte)



$$ax^2+bx+c>0 \quad per \quad x_1<x<x_2$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad per \quad x<x_1 \quad e \quad x>x_2$$

Se $a>0$

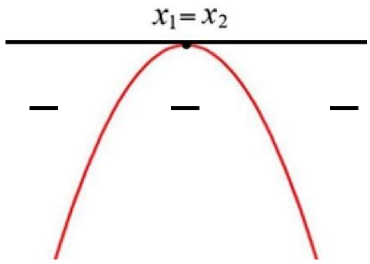
Δ=0 (2 soluzioni reali e coincidenti)



$$ax^2+bx+c>0 \quad per \quad x \neq x_{1,2}$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad mai$$

Se $a<0$

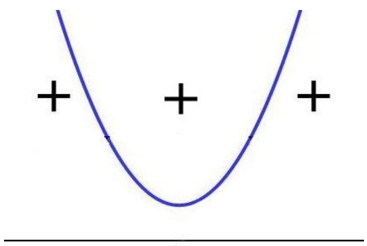
Δ=0 (2 soluzioni reali e coincidenti)



$$ax^2+bx+c>0 \quad mai$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad per \quad x \neq x_{1,2}$$

Se $a>0$

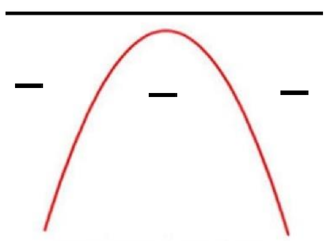
Δ<0 (nessuna soluzione reale)



$$ax^2+bx+c>0 \quad sempre$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad mai$$

Se $a<0$

Δ<0 (nessuna soluzione reale)



$$ax^2+bx+c>0 \quad mai$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad sempre$$

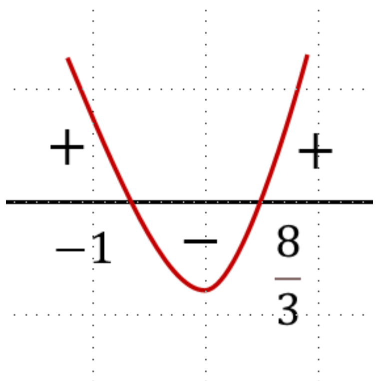
Per tracciare il grafico occorre quindi considerare il segno del coefficiente della x^2 ovvero la "a" e il numero delle soluzioni (o in alternativa il delta)

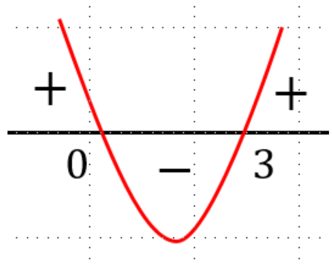
IL GRAFICO DIPENDE SOLO DA QUESTI PARAMETRI!

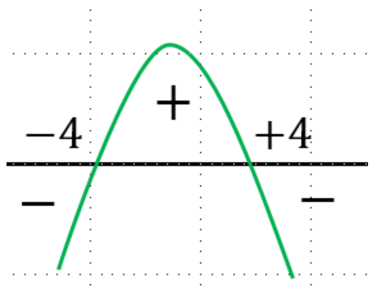
Non dipende dal fatto che la disequazione chieda i valori maggiori o minori di zero. Una volta che si sono controllati a e delta (o numero di soluzioni) si può tracciare la parabola. La parabola permette quindi di stabilire gli intervalli di positività e negatività della disequazione

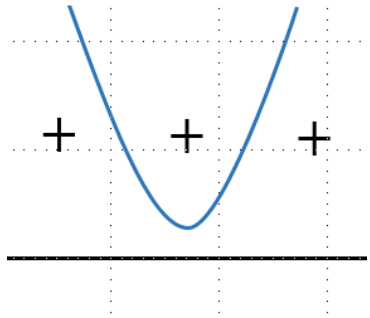
Come si risolve una disequazione di 2° grado

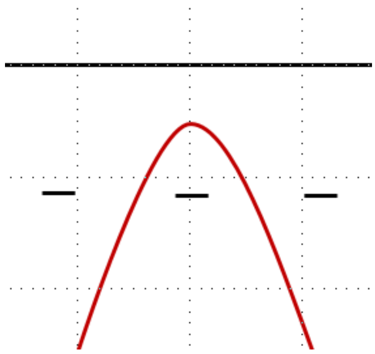
Ecco, tramite un esempio, come si risolve una disequazione di secondo grado

È data la disequazione a lato	$3x^2-5x-8>0$
Come prima cosa, occorre uguagliarla a zero e trovare le soluzioni dell'equazione associata	$3x^2-5x-8=0$ $x_1,x_2=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot(-8)}}{2\cdot3}$ $x_1,x_2=\dfrac{5\pm\sqrt{25+96}}{6}=\dfrac{5\pm\sqrt{121}}{6}$ $x_1,x_2=\dfrac{5\pm11}{6}$ $x_1=-\dfrac{\cancel{6}^1}{\cancel{6}^1}=-1;\ x_2=\dfrac{\cancel{16}^8}{\cancel{6}^3}=\dfrac{8}{3}$
Trovate le soluzioni, si considera il segno della "a" (coefficiente di x^2) e il delta (o anche il numero di soluzioni). Poiché la a è positiva, la parabola ha la concavità verso l'alto e interseca l'asse x in due punti. Le soluzioni infatti sono due e sono reali e distinte, come conferma il delta che è maggiore di zero	
Come si vede dalla parabola, i segni positivi sono "esterni", ovvero, precedono il -1 e seguono l'8/3, mentre i negativi sono compresi tra questi due valori. Poiché la disequazione chiede i valori maggiori di zero, la soluzione della disequazione è quella riportata qui a lato	SOLUZIONE DELLA DISEQUAZIONE $x<-1 \quad e \quad x>\dfrac{8}{3}$ Se il testo avesse chiesto i valori minori di zero, il grafico sarebbe stato lo stesso ma si sarebbero dovuti scegliere i valori compresi tra -1 e 8/3

Esempio 1	
È data la disequazione a lato	$x^2 - 3x \leq 0$
Prima di tutto si uguaglia a zero e si trovano le soluzioni dell'equazione associata (da notare che è un'equazione spuria)	$x^2 - 3x = 0$ $x(x-3) = 0$ $x_1 = 0; \quad x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$
Ora si traccia la parabola tenendo conto che $\boldsymbol{a>0}$ e che ha l'equazione ha due soluzioni reali e distinte (Il delta non è stato calcolato, per questo ci si è basati sul numero delle soluzioni)	
Stavolta però, la disequazione chiede i valori minori o uguali a zero, perciò si devono prendere i valori interni e gli estremi dell'intervallo (0 e 3) sono inclusi nella soluzione (per questo è presente anche l'uguale)	$0 \leq x \leq 3$

Esempio 2	
Sia data la disequazione a lato	$-x^2 + 16 \leq 0$
Prima di tutto si devono trovare le soluzioni dell'equazione associata (in questo caso è pura). Si noti che sono stati cambiati tutti i segni dell'equazione perché il coefficiente della x^2 è negativo ed è preferibile che sia positivo.	$-x^2 + 16 \leq 0$ $-x^2 + 16 = 0$ $-x^2 = -16 \quad \longrightarrow \quad x^2 = 16$ $x = \pm\sqrt{16} \quad \longrightarrow \quad x = \pm 4$ $x_1 = -4; \;\; x_2 = +4$
Si traccia la parabola, tenendo conto che l'equazione ha due soluzioni reali e distinte e che $\boldsymbol{a<0}$. *N.B.* Si deve prendere in considerazione il segno davanti alla x^2 nella disequazione iniziale e non quello dell'equazione in cui è stato cambiato il segno. Come prima il delta non è stato calcolato in quanto l'equazione è incompleta	
Sono richiesti i valori minori o uguali a zero, perciò la soluzione è data dagli intervalli indicati a lato (esterni)	$x_1 \leq -4; \;\; x_2 \geq +4$

Esempio 3	
È data la disequazione a lato	$x^2 + 4x + 11 > 0$
Si risolve trovando le soluzioni dell'equazione associata	$x^2 + 4x + 11 = 0$ $x_1, x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-11}}{1}$ $x_1, x_2 = -2 \pm \sqrt{-7}$
a>0 **Δ<0** L'equazione non ammette soluzioni reali. Il grafico quindi è questo a fianco	
Sono richiesti i valori maggiori di zero, perciò la soluzione è tutto R. La disequazione è sempre verificata (si scrive anche $\forall x \in \mathrm{R}$)	Sempre verificata

Esempio 4	
È data la disequazione a lato	$-x^2 + x - 8 \geq 0$
Si risolve trovando le soluzioni dell'equazione associata. Per "comodità" nell'equazione associata, sono stati cambiati i segni. Per tracciare la parabola però, è meglio rifarsi sempre al segno iniziale	$x^2 - x + 8 = 0$ $x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-32}}{2}$ $x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{-31}}{2}$
Tenendo conto che ***a<0*** **Δ<0** L'equazione non ammette soluzioni reali. Il grafico quindi è quello a fianco	
Sono richiesti i valori maggiori o uguali a zero, perciò non ammette soluzioni in quanto non ci sono intervalli col segno positivo	Mai verificata

Disequazioni di secondo grado fratte

Anche le disequazioni di secondo grado (come quelle di primo grado e quelle di grado superiore al secondo) possono essere fratte.
Può capitare quindi di avere l'incognita al denominatore. Come già visto nelle disequazioni di primo grado, una volta fatto il minimo comune multiplo

NON SI ELIMINA

ma si studia il suo segno, esattamente come avviene per il numeratore

Sia quella a lato, una disequazione fratta da risolvere.
Per prima cosa si fanno le scomposizioni e il minimo comune multiplo, portando contemporaneamente tutto al primo membro (è preferibile).

$$\frac{14}{3x+6}+\frac{2}{3(x-1)}\geq 1-\frac{2}{3x-3}$$

$$\frac{14}{3(x+2)}+\frac{2}{3(x-1)}-1+\frac{2}{3(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{14(x-1)+2(x+2)-3(x+2)(x-1)+2(x+2)}{3(x+2)(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{14x-14+2x+4-3(x^2-x+2x-2)+2x+4}{3(x+2)(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{14x-14+2x+4-3x^2+3x-6x+6+2x+4}{3(x+2)(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{-3x^2+15x}{3(x+2)(x-1)}\geq 0$$

Si studiano poi numeratore e denominatore separatamente imponendoli maggiori di zero.
Al numeratore si ha una disequazione di secondo grado e quindi si deve fare il grafico della parabola.

$$-3x^2+15x\geq 0$$

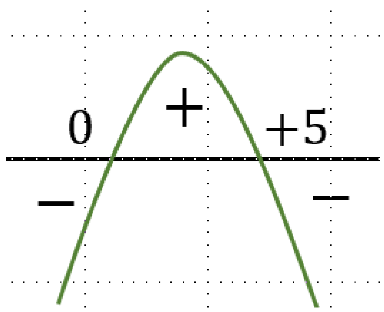
$$-3x^2+15x=0$$

$$3x^2-15x=0$$

$$3x(x-5)=0$$

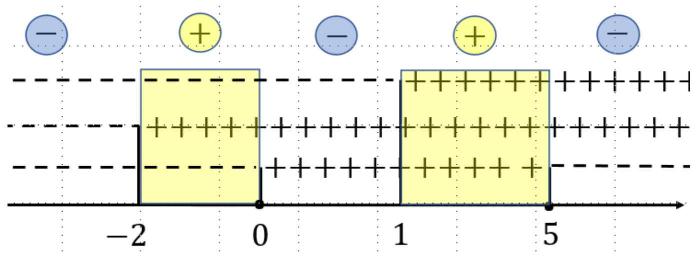
$$3x=0\rightarrow x_1=0$$

$$x-5=0\ \rightarrow x_2=5$$



Il numeratore è verificato dall'intervallo qui a lato.
C'è anche l'uguale perché la condizione iniziale lo prevedeva

$$0\leq x\leq 5$$

Segue “disequazioni di secondo grado fratte”	
Il denominatore è un prodotto di tre termini di cui uno (il 3) è sempre positivo. Basta perciò studiare gli altri due (separatamente)	$(x+2)(x-1)>0$ $x+2>0 \rightarrow x>-2$ $x-1>0 \rightarrow x>+1$
A questo punto si fa lo studio del segno (come già visto nelle disequazioni di primo grado), mettendo insieme i risultati del numeratore e del denominatore	
Poiché la disequazione chiede i valori maggiori o uguali a zero, si devono prendere gli intervalli positivi. Da notare che i valori del numeratore, evidenziati nel grafico con un punto, sono accettabili, per cui si scrive anche l’uguale. Viceversa quelli del denominatore sono da escludere.	$-2<x\leq 0$ $1<x\leq 5$

Metodo alternativo alla parabola per risolvere una disequazione di 2° grado	
Una disequazione di secondo grado, si può risolvere anche in questo modo: • Si scompone l’equazione associata • Si effettua lo studio del segno (come se fosse una disequazione fratta)	
E’ data la disequazione a lato	$x^2-6x+5<0$
Per risolverla, prima di tutto si effettua la scomposizione	$(x-1)(x-5)<0$ (Per questa scomposizione, vedi capitolo “relazioni tra soluzioni e coefficienti di un’equazione di 2° grado” o capitolo sulla scomposizione in fattori di un trinomio di secondo grado)
A questo punto si studiano i singoli fattori e si fa lo studio del segno Poiché chiede i valori <0, si prende l’intervallo con i segni −, cioè: $\mathbf{1<x<5}$	$x-1>0 \rightarrow x>1$ $x-5>0 \rightarrow x>5$