Equazioni parametriche di secondo grado

Sono equazioni in cui, oltre l'incognita, compare un'altra lettera detta anche "parametro". Al variare di questo parametro varia l'equazione e di conseguenza variano anche le soluzioni. Nei quesiti riguardanti le equazioni parametriche viene richiesto di determinare il valore o i valori del parametro in modo che l'equazione ammetta determinate soluzioni. Nello schema che segue, sono riportati alcuni dei casi più comuni e il relativo procedimento da applicare

N.B. Prima di procedere, occorre sempre calcolare il delta dell'equazione e imporlo maggiore o uguale a zero, per capire quali valori di K tra quelli che si troveranno, saranno accettabili

Condizioni	**Cosa si deve imporre**
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta una soluzione uguale a zero $x_1 = 0$	Per avere una soluzione uguale a zero, l'equazione deve essere spuria, quindi si impone: $c=0$
Determinare il valore di K in modo che l'equazione abbia soluzioni opposte $x_1 = -x_2$	Per avere soluzioni opposte, l'equazione deve essere pura, quindi si impone: $b=0$
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta soluzioni uguali $x_1 = x_2$	Per avere soluzioni uguali, l'equazione deve avere il delta uguale a zero, quindi si impone: $\Delta=0$
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta una determinata soluzione, ad esempio -2 $x_1 = -2$	Occorre sostituire il valore -2 al posto della x nell'equazione data. **SOSTITUZIONE**
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta soluzioni reciproche $x_1 = \frac{1}{x_2}$	Se le soluzioni sono reciproche, facendo il minimo comune multiplo nei due membri e poi eliminandolo si ottiene $x_1 \cdot x_2 = 1$ Poiché il prodotto delle soluzioni è c/a, si impone: $\frac{c}{a} = 1 \quad \rightarrow \quad c = a$

Condizioni	Cosa si deve imporre
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta soluzioni antireciproche $$x_1 = -\frac{1}{x_2}$$	Se le soluzioni sono antireciproche, significa anche che $$x_1 \cdot x_2 = -1$$ Perciò si impone $$\frac{c}{a} = -1 \quad \rightarrow \quad c = -a$$
Determinare K in modo che la somma delle soluzioni sia uguale ad un numero dato, ad esempio 1 $$x_1 + x_2 = 1$$	Poiché la somma delle soluzioni è $-b/a$, si impone $$-\frac{b}{a} = 1$$
Determinare K in modo che il prodotto delle soluzioni sia uguale ad un numero dato, esempio -2 $$x_1 \cdot x_2 = -2$$	Poiché il prodotto delle soluzioni è c/a, si impone: $$\frac{c}{a} = -2$$
Determinare K in modo che la somma dei reciproci delle soluzioni sia uguale ad un numero dato, ad esempio 4 $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$$	Per capire cosa imporre occorre "lavorare" sulla condizione. $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$$ $$\frac{x_2 + x_1}{\cancel{x_1 \cdot x_2}^{1}} = \frac{4(x_1 \cdot x_2)}{\cancel{x_1 \cdot x_2}^{1}}$$ $$-\frac{b}{\cancel{a}^{1}} = 4 \cdot \frac{c}{\cancel{a}^{1}}$$ Perciò si impone $$-b = 4c$$
Determinare K in modo che la somma dei quadrati delle soluzioni sia uguale ad un numero dato, ad esempio 7 $$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 7$$	Per capire cosa imporre occorre "lavorare" sulla condizione $$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 7$$ $$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7$$ $$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = 7$$ $$\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = 7$$ $$\frac{b^2 - 2ac}{\cancel{a^2}^{1}} = \frac{7a^2}{\cancel{a^2}^{1}}$$ Perciò si impone $$b^2 - 2ac = 7a^2$$

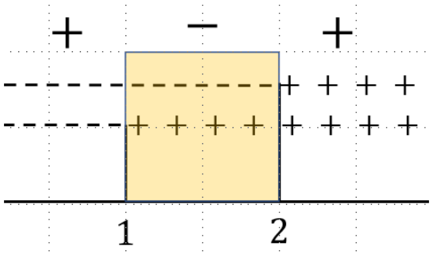
Condizioni	Cosa si deve imporre
Determinare K in modo che la somma dei quadrati dei reciproci delle soluzioni sia uguale ad un numero dato, ad esempio 3 $\left(\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{x_2}\right)^2=3$ Ovvero: $\frac{1}{(x_1)^2}+\frac{1}{(x_2)^2}=3$	Per capire cosa imporre occorre “lavorare” sulla condizione $\frac{(x_2)^2+(x_1)^2}{\cancel{(x_1)^2\cdot(x_2)^2}^1}=\frac{3\cdot(x_1)^2\cdot(x_2)^2}{\cancel{(x_1)^2\cdot(x_2)^2}^1}$ $(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=3\cdot(x_1\cdot x_2)^2$ $\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=3\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2$ $\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{3c^2}{a^2}$ $\frac{b^2-2ac}{\cancel{a^2}^1}=\frac{3c^2}{\cancel{a^2}^1}$ Perciò si impone $b^2-2ac=3c^2$
Determinare K in modo che una soluzione sia multipla dell’altra, ad esempio sia tripla dell’altra $x_1=3\cdot x_2$ Ovviamente il procedimento a lato si adatta anche al caso generale $x_1=n\cdot x_2$	Per capire cosa imporre occorre “lavorare” sulla condizione. La relazione a fianco si mette a sistema con somma e prodotto delle soluzioni $\begin{cases} x_1=3\cdot x_2 \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=3\cdot x_2 \\ 3x_2+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=3\cdot x_2 \\ 4x_2=-\frac{b}{a}\longrightarrow x_2=-\frac{b}{4a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=3\left(-\frac{b}{4a}\right)=-\frac{3b}{4a} \\ 4x_2=-\frac{b}{a}\longrightarrow x_2=-\frac{b}{4a} \\ -\frac{3b}{4a}\cdot\left(-\frac{b}{4a}\right)=\frac{c}{a} \end{cases}$ $\frac{3b^2}{16a^2}=\frac{c}{a}\longrightarrow\frac{3b^2}{\cancel{16a^2}^1}=\frac{16ac}{\cancel{16a^2}^1}$ Perciò si impone $3b^2=16ac$

Condizioni	Cosa si deve imporre
Determinare K in modo che la somma dei cubi delle soluzioni sia uguale ad un numero dato, ad esempio 10 $(x_1)^3+(x_2)^3=10$	Per capire cosa imporre occorre "lavorare" sulla condizione $(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=10$ $\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=10$ $-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=10$ $\frac{-b^3+3abc}{\cancel{a^3}^{1}}=\frac{10a^3}{\cancel{a^3}^{1}}$ Perciò si impone $-b^3+3abc=10a^3$
Determinare K in modo che la somma degli inversi dei cubi delle soluzioni sia uguale ad un numero dato, ad esempio -4 $\left(\frac{1}{x_1}\right)^3+\left(\frac{1}{x_2}\right)^3=-4$ Ovvero: $\frac{1}{(x_1)^3}+\frac{1}{(x_2)^3}=3$	Per capire cosa imporre occorre "lavorare" sulla condizione $\frac{(x_2)^3+(x_1)^3}{\cancel{(x_1)^3\cdot(x_2)^3}^{1}}=\frac{-4\cdot(x_1)^3\cdot(x_2)^3}{\cancel{(x_1)^3\cdot(x_2)^3}^{1}}$ $(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-4(x_1x_2)^3$ $\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-4\left(\frac{c}{a}\right)^3$ $-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{-4c^3}{a^3}$ $\frac{-b^3+3abc}{\cancel{a^3}^{1}}=\frac{-4c^3}{\cancel{a^3}^{1}}$ Perciò si impone $-b^3+3abc=-4c^3$
Determinare K in modo che le soluzioni siano discordi	Affinché le soluzioni siano discordi, è necessario che il loro prodotto sia negativo. Perciò si impone $\frac{c}{a}<0$
Determinare K in modo che le soluzioni siano concordi	Affinché le soluzioni siano concordi, è necessario che il loro prodotto sia positivo. Perciò si impone $\frac{c}{a}>0$
Determinare K in modo che le soluzioni siano reali e distinte	Si impone $\Delta>0$

Esempio	
Data l'equazione parametrica $$(k-1)x^2-(2k+1)x+k-2=0$$ Determinare il valore di K in modo che si verifichino le condizioni richieste	
Prima di risolvere i vari casi è sempre necessario calcolare il delta dell'equazione e stabilire per quali valori del parametro K il delta sia maggiore o uguale a zero. Nell'esempio, tutti i valori di K che si troveranno attraverso le varie condizioni, dovranno essere maggiori o uguali a 7/16, altrimenti non saranno accettabili	$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$ $\Delta=(2k+1)^2-4\cdot(k-1)\cdot(k-2)$ $\Delta=4k^2+1+4k-4(k^2-2k-k+2)$ $\Delta=\cancel{4k^2}^{0}+1+4k\cancel{-4k^2}^{0}+8k+4k-8$ $\Delta=+1+4k+8k+4k-8$ $\Delta=16k-7\geq 0$ $16k\geq 7 \quad \rightarrow \quad k\geq\frac{7}{16}$
Condizioni	**Esempio**
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta una soluzione uguale a zero $x_1=0$ Condizione da imporre: $c=0$	$k-2=0 \longrightarrow k=2$ Soluzione accettabile. Sostituendo 2 al posto di K nell'equazione assegnata, si otterrà un'equazione che ammetterà una soluzione nulla (uguale a zero)
Determinare il valore di K in modo che l'equazione abbia soluzioni opposte $x_1=-x_2$ Condizione da imporre: $b=0$	$2k+1=0 \quad \rightarrow \quad 2k=-1 \quad \rightarrow k=-\frac{1}{2}$ Soluzione non accettabile (è minore di 7/16) L'equazione data, per nessun valore di K ammetterà soluzioni opposte
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta soluzioni uguali $x_1=x_2$ Condizione da imporre: $\Delta=0$	$\Delta=16k-7=0$ $16k=7 \quad \rightarrow \quad k=\frac{7}{16}$ Soluzione accettabile. Sostituendo 7/16 al posto di K si otterrà un'equazione con soluzioni uguali

Condizioni	Esempio
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta la soluzione seguente: $x_1 = -2$ Condizione da imporre: Sostituire -2 al posto della x nell'equazione iniziale	$(k-1)(-2)^2-(2k+1)(-2)+k-2=0$ $(k-1)\cdot 4-(2k+1)(-2)+k-2=0$ $4k-4+4k+\cancel{2}^0+k-\cancel{2}^0=0$ $9k=+4$ $k=\frac{4}{9}$ Soluzione accettabile in quanto 4/9 >7/16 Sostituendo 4/9 a k si otterrà un'equazione che ammetterà una soluzione uguale a -2
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta soluzioni reciproche $x_1 = \frac{1}{x_2}$ Condizione da imporre: $c=a$	$k-1=k-2$ $k-k=1-2$ $0=-1$ Come si vede l'equazione in K è impossibile, per cui l'equazione data non ammetterà mai soluzioni reciproche per nessun valore di K
Determinare il valore di K in modo che l'equazione ammetta soluzioni antireciproche $x_1 = -\frac{1}{x_2}$ Condizione da imporre: $c=-a$	$k-1=-k+2$ $k+k=1+2$ $2k=3 \quad \to \quad k=\frac{3}{2}$ Soluzione accettabile. Sostituendo 3/2 a k, si otterrà un'equazione con soluzioni antireciproche
Determinare K in modo che la somma delle soluzioni sia uguale a 1 $x_1+x_2=1$ Condizione da imporre: $-\frac{b}{a}=1$	$\frac{2k+1}{k-1}=1 \ \to \ 2k+1=k-1$ $2k-k=-1-1 \quad \to \quad k=-2$ Soluzione non accettabile. La somma delle soluzioni dell'equazione non sarà mai uguale a 1, per nessun valore REALE di K
Determinare K in modo che il prodotto delle soluzioni sia uguale a-2 $x_1 \cdot x_2 = -2$ Condizione da imporre: $\frac{c}{a}=-2$	$\frac{k-2}{k-1}=-2 \ \to k-2=-2(k-1)$ $k-2=-2k+2 \ \to \ k+2k=2+2$ $3k=4 \ \to \ k=\frac{4}{3}$ Soluzione accettabile. Sostituendo 4/3 a K si otterrà un'equazione che ammetterà due soluzioni il cui prodotto sarà -2

Condizioni	Esempio
Determinare K in modo che la somma dei reciproci delle soluzioni sia uguale a 4 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$ Condizione da imporre: $-b=4c$	$2k+1=4(k-2)$ $2k+1=4k-8$ $2k-4k=-1-8$ $-2k=-9 \rightarrow 2k=9$ $k=\frac{9}{2}$ Soluzione accettabile. Sostituendo 9/2 a K si otterrà un'equazione con soluzioni tali che la somma dei loro inversi sarà uguale a 4
Determinare K in modo che la somma dei quadrati delle soluzioni sia uguale a 7 $(x_1)^2+(x_2)^2=7$ Condizione da imporre: $b^2-2ac=7a^2$	$+(2k+1)^2-2(k-1)(k-2)=7(k-1)^2$ $4k^2+1+4k-2(k^2-2k-k+2)=7(k^2+1-2k)$ $4k^2+1+4k-2k^2+4k+2k-4=7k^2+7-14k$ $-5k^2+24k-10=0$ $+5k^2-24k+10=0$ $k_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-50}}{5}=\frac{12\pm\sqrt{94}}{5}$ $k_1=\frac{12-\sqrt{94}}{5}$ → Accettabile $k_2=\frac{12+\sqrt{94}}{5}$ → Accettabile Sostituendo questi due valori a K si otterranno due equazioni con soluzioni tali che la somma dei loro quadrati sarà uguale a 7
Determinare K in modo che la somma dei quadrati dei reciproci delle soluzioni sia uguale a 3 $\left(\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{x_2}\right)^2=3$ Condizione da imporre: $b^2-2ac=3c^2$	$(2k+1)^2-2(k-1)(k-2)=3(k-2)^2$ $4k^2+1+4k-2(k^2-2k-k+2)=3(k^2-4k+4)$ $4k^2+1+4k-2k^2+4k+2k-4=3k^2-12k+12$ $-k^2+22k-15=0 \rightarrow k^2-22k+15=0$ $k=11\pm\sqrt{121-15} \rightarrow 11\pm\sqrt{106}$ Sono entrambe accettabili. Sostituendo questi due valori a K si otterranno due equazioni con soluzioni tali che la somma dei quadrati dei loro reciproci sarà uguale a 3
Determinare K in modo che la somma dei cubi delle soluzioni sia uguale a 10 $(x_1)^3+(x_2)^3=10$ Condizione da imporre: $-b^3+3abc=10a^3$	$+(2k+1)^3+3(k-1)(-2k-1)(k-2)=10(k-1)^3$ Tralasciando i calcoli piuttosto laboriosi, risolvendo, si arriverà ad un'equazione in K che potrà avere da 0 a 3 soluzioni reali. Sostituendo questi valori a K si potrebbero ottenere quindi fino a 3 equazioni (una per ciascun valore di K accettabile) con soluzioni tali che la somma dei loro cubi sarà uguale a 10

Condizioni	**Esempio**
Determinare K in modo che una soluzione sia tripla dell’altra $x_1 = 3 \cdot x_2$ Condizione da imporre: $3b^2 = 16ac$	$3(2k+1)^2 = 16(k-1)(k-2)$ $3(4k^2+1+4k) = 16(k^2-2k-k+2)$ $12k^2+3+12k = 16k^2-32k-16k+32$ $-4k^2+60k-29=0$ $4k^2-60k+29=0$ $k_1, k_2 = \frac{30 \pm \sqrt{900-116}}{4}$ $k_1, k_2 = \frac{30 \pm \sqrt{784}}{4}$ $k_1, k_2 = \frac{30 \pm 28}{4}$ $k_1 = \frac{30-28}{4} = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{4}_2} = \frac{1}{2} \rightarrow$ $\boxed{\text{Accettabile}}$ $k_2 = \frac{30+28}{4} = \frac{\cancel{58}^{29}}{\cancel{4}_2} = \frac{29}{2} \rightarrow$ $\boxed{\text{Accettabile}}$ Sostituendo questi due valori a K si otterranno due equazioni con soluzioni che saranno una il triplo dell’altra
Determinare K in modo che la somma dei cubi degli inversi delle soluzioni sia uguale a-4 $\left(\frac{1}{x_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{x_2}\right)^3 = -4$ Condizione da imporre: $-b^3+3abc=-4c^3$	$+(2k+1)^3+3(k-1)(-2k-1)(k-2) = -4(k-2)^3$ Vedi caso “somma dei cubi delle soluzioni”
Determinare K in modo che le soluzioni siano discordi Condizione da imporre: $\frac{c}{a} < 0$ 	$\frac{k-2}{k-1} < 0$ $N.\ k-2>0 \rightarrow k>2$ $D.\ k-1>0 \rightarrow k>1$ Poiché li chiede <0, si prende l’intervallo: *1<k<2* (Vedi studio del segno a lato) Se si prendono dei valori all’interno di questo intervallo e si sostituiscono a K nell’equazione data, si otterranno equazioni con soluzioni discordi
N.B. Se anziché chiedere il valore di K, il testo chiede di determinare <u>l’equazione</u> che soddisfa determinate condizioni, il procedimento è uguale, però, una volta trovato K, si deve sostituire nel testo in modo da ricavare l’equazione richiesta	