Insiemi

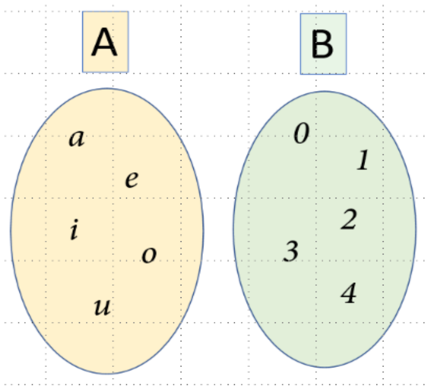
Definizione di insieme

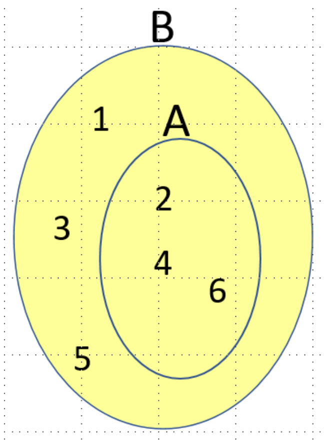
Un insieme è un raggruppamento di elementi legati da una proprietà comune o più semplicemente, è un “elenco”, una “collezione” di oggetti che possono essere numeri, lettere, persone e così via.
È fondamentale che gli elementi di un insieme siano riconoscibili universalmente e oggettivamente e non secondo il parere di qualcuno. Per esempio, le vocali dell’alfabeto italiano costituiscono un insieme. Le canzoni italiane più emozionanti degli ultimi dieci anni non costituisce un insieme perché una canzone può essere emozionante per alcuni ma per altri no.

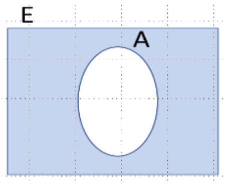
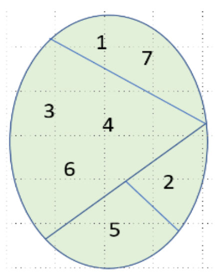
Rappresentazioni di un insieme

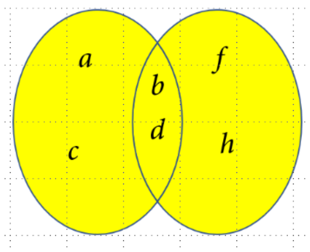
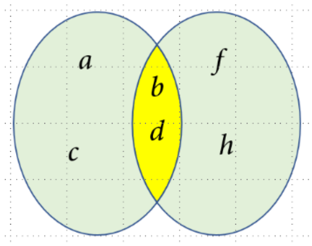
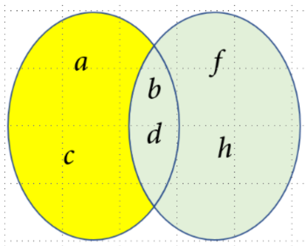
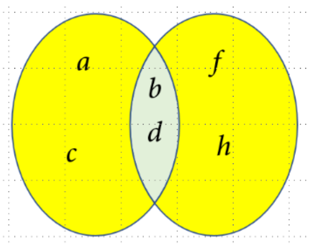
Esistono tre metodi per rappresentare un insieme.

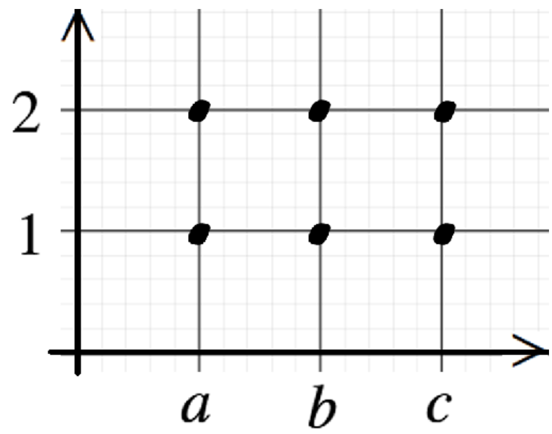
- Rappresentazione per elencazione (detta anche estensiva)
- Rappresentazione tramite proprietà caratteristica (detta anche intensiva)
- Rappresentazione tramite i diagrammi di Eulero-Venn (detta anche grafica)

Rappresentazione per elencazione In questa rappresentazione, gli elementi dell’insieme sono appunto “elencati”, sono cioè scritti all’interno di due parentesi graffe e divisi tra loro da una virgola.	$A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
Rappresentazione tramite proprietà caratteristica In questa rappresentazione, si indica con “x” l’elemento generico dell’insieme e, a seguire, la descrizione della caratteristica comune a tutti gli elementi dell’insieme	$A = \{x \ / \ x \text{ è } vocale\ dell'alfabeto\ italiano\}$ Si legge: A è l’insieme degli elementi x tali che x è vocale dell’alfabeto italiano $B = \{x \ / \ x \text{ è } un\ numero\ naturale\ minore\ di\ 5\}$ B è l’insieme degli elementi x tali che x è un numero naturale minore di 5
Rappresentazione grafica (Eulero-Venn) Si ottiene scrivendo, dentro una linea chiusa, gli elementi dell’insieme	

Alcune definizioni	
Insiemi uguali	Due insiemi sono uguali se hanno esattamente gli stessi elementi. Si scriverà A=B. Esempio: $A = \{x \ / \ x \text{ è } un\ numero\ naturale\ minore\ di\ 4\}$ $B = \{0,1,2,3\}$
Cardinalità	Rappresenta il numero di elementi dell'insieme. Si indica con $\lvert A \rvert$, con card(A) o anche con #A
Insiemi equipotenti o equipollenti	Sono insiemi che hanno lo stesso numero di elementi, ovvero che hanno la stessa "cardinalità". Esempio: $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{a, e, i, o, u\}$
Insieme vuoto	L'insieme vuoto è un insieme che non contiene elementi. Si indica con il simbolo: ∅ o con $A = \{\cdots\}$ Esempio: $A = \{x \ / \ x \text{ è } un\ numero\ negativo\ compreso\ tra +5\ e +7\}$
Insieme universo o insieme ambiente	È un insieme all'interno del quale si può "lavorare" con suoi sottoinsiemi. È una sorta di ambiente sul quale muoversi. Per questo viene chiamato "insieme ambiente". Siano dati, per esempio, gli insiemi: $A = \{1,2,3,4,5\}$ - $B = \{2,4,6\}$ - $C = \{1,3,5\}$ L'insieme ambiente in questo caso potrebbe essere N, insieme dei numeri naturali
Sottoinsieme proprio di un insieme 	Si dice che A è sottoinsieme proprio di B e si scrive $A \subset B$ se tutti gli elementi di A appartengono anche a B ed esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A. In questo caso si dice che A è contenuto in B o che è incluso in B in senso stretto. In simboli: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B\ e\ A \neq B$ *"A è contenuto in B se e solo se ogni x appartenente ad A appartiene anche a B con A diverso da B"* Esempio: $A = \{2,4,6\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ Tutti gli elementi di A appartengono anche a B, mentre non tutti gli elementi di B appartengono anche ad A

Segue “Alcune definizioni”	
Sottoinsieme improprio di un insieme	Si dice che A è sottoinsieme improprio di B e si scrive $A \subseteq B$ se tutti gli elementi di A appartengono anche a B e non esiste alcun un elemento di B che non appartiene ad A. Vale a dire che anche tutti gli elementi di B appartengono ad A Nota importante. Ogni insieme non vuoto, ammette come sottoinsiemi impropri sé stesso e l’insieme vuoto: $A \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq A$
Insieme finito	È un insieme con un numero “finito” o “limitato” di elementi o anche un insieme la cui cardinalità è un numero naturale (finito). Esempio: $B = \{a, e, i, o, u\}$
Insieme infinito	È un insieme con un numero infinito di elementi. Per esempio l’insieme dei numeri reali R è infinito
Complementare di un insieme 	Sia dato un insieme ambiente E e sia A un suo sottoinsieme. Si definisce complementare di A in E e si indica con $\overline{A_E}$, l’insieme degli elementi che appartengono a E ma non ad A, cioè l’insieme dato dalla differenza E-A. Quindi $\overline{A_E} = E - A$
Insieme delle parti	L’insieme delle parti di un insieme, per esempio A, è un insieme i cui elementi sono tutti i possibili sottoinsiemi di A, compreso l’insieme vuoto e l’insieme A stesso. Si indica con $\mathscr{P}(A)$. Esempio: È dato l’insieme $A = \{a, b, c\}$ I suoi sottoinsiemi sono: $A_1 = \{a\}$. $A_2 = \{b\}$. $A_3 = \{c\}$. $A_4 = \{a, b\}$. $A_5 = \{a, c\}$. $A_6 = \{b, c\}$. $A_7 = A = \{a, b, c\}$. $A_8 = \emptyset$ L’insieme delle parti sarà: $\mathscr{P}(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$
Insiemi disgiunti	Sono insiemi che non hanno elementi in comune
Partizione di un insieme 	La partizione di un insieme è quell’insieme i cui elementi sono suoi sottoinsiemi non vuoti e disgiunti e la cui unione è uguale ad A. Esempio: Le classi di una scuola costituiscono una partizione dell’insieme scuola. Esse sono infatti sottoinsiemi dell’insieme scuola, non sono vuoti e la loro unione dà l’insieme scuola

Operazioni con gli insiemi	
Unione 	L'unione di due insiemi A e B, è un insieme i cui elementi appartengono ad A o a B. O anche: è un insieme i cui elementi sono tutti gli elementi degli insiemi considerati prendendo una sola volta gli elementi comuni. Si scrive: $A \cup B$ Esempio. Dati gli insiemi A e B $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{b, d, f, h\}$ $A \cup B = \{a, b, c, d, f, h\}$
Intersezione 	L'intersezione tra due insiemi è un insieme i cui elementi appartengono sia ad A che a B. Si scrive: $A \cap B$. Esempio. Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, d, f, h\}$ l'intersezione è: $A \cap B = \{b, d\}$ Due insiemi che non hanno elementi in comune, si dicono "disgiunti" (come già visto in precedenza)
Differenza 	La differenza tra due insiemi A e B è un insieme i cui elementi appartengono ad A e non a B. Si scrive: $A - B$ o anche $A \setminus B$. Esempio. Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, d, f, h\}$ la differenza è: $A - B = \{a, c\}$
Differenza simmetrica 	Questo insieme è dato da tutti gli elementi di A e di B, tranne quelli comuni. Si indica con $A \Delta B$ $A \Delta B = A \cup B - A \cap B$
Prodotto cartesiano	Il prodotto cartesiano tra due insiemi, è un insieme i cui elementi sono tutte le possibili coppie ordinate (a,b) che si possono formare con gli elementi dei due insiemi. In tali coppie, il primo termine appartiene ad A e il secondo a B. Si scrive: AxB. Esempio: Dati gli insiemi: $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1,2\}$, Il prodotto cartesiano è dato da: AxB=$\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

Rappresentazione grafica del prodotto cartesiano	
Come tutti gli altri insiemi, anche il prodotto cartesiano si può rappresentare con i vari metodi già visti in precedenza: estensiva, tramite proprietà caratteristica e con diagramma. La più importante (probabilmente) è quella omonima, cioè la rappresentazione cartesiana. In questa rappresentazione, gli elementi $a \in A$ vengono disposti su un asse orizzontale (asse delle ascisse) e quelli $b \in B$ su un asse verticale (asse delle ordinate). Gli elementi del prodotto cartesiano, vengono individuati dagli "incroci" delle perpendicolari a tali assi tracciate dai trattini che individuano la posizione degli elementi (vedi figura a lato)	Prendendo in esame l'esercizio precedente, dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1,2\}$ Si è visto che il prodotto cartesiano da rappresentare è dato dalle coppie: $\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$ La rappresentazione cartesiana perciò è questa qui sotto con i punti ad evidenziare le coppie-elementi 

Leggi di De Morgan	
Sono leggi che "legano" le operazioni tra insiemi	
Prima legge di De Morgan. Il complementare dell'intersezione tra due insiemi, è uguale all'unione dei complementari dei due insiemi	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
Seconda legge di De Morgan. Il complementare dell'unione tra due insiemi, è uguale all'intersezione dei complementari dei due insiemi	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Simbologia (Riepilogo)		
$\in$	Indica l'appartenenza di un elemento ad un insieme	$a \in A$
$\notin$	Indica la non appartenenza di un elemento ad un insieme	$b \notin A$
$\subset$	Indica che un insieme è incluso in senso stretto in un altro insieme, cioè è un suo sottoinsieme proprio	$B \subset A$
$\subseteq$	Indica che un insieme è incluso o uguale ad un altro insieme, in senso largo. È un suo sottoinsieme ma può coincidere con esso. È quindi un suo sottoinsieme improprio	$B \subseteq A$
$\supset$	Indica che un insieme contiene un altro insieme, è un suo soprainsieme	$A \supset B$
$\supseteq$	Indica che un insieme è soprainsieme di un insieme dato ma può coincidere con esso	$A \supseteq B$
$\cup$	Indica l'unione tra 2 insiemi	$A \cup B$
$\cap$	Indica l'intersezione tra 2 insiemi	$A \cap B$
$\backslash$	Indica la differenza tra 2 insiemi	$A \backslash B$
-	Indica la differenza tra 2 insiemi	A-B
Δ	Indica la differenza simmetrica tra due insiemi	$A \Delta B$
sup	Indica l'estremo superiore di un insieme	Sup di A
inf	Indica l'estremo inferiore di un insieme	Inf di A
$\{\dots\}$	Indica l'insieme vuoto	A=$\{\dots\}$
$\emptyset$	Indica l'insieme vuoto	A=$\emptyset$
$\mathscr{P}(A)$	Indica l'insieme delle parti di un insieme	$\mathscr{P}(A)$
$\bar{A}$	Indica il complementare di un insieme rispetto ad un determinato insieme "ambiente" (esempio insieme E)	$\bar{A}$=E-A