# Limiti

I limiti di una funzione sono uno strumento importantissimo in analisi matematica. Essi servono a capire qual è l'andamento della funzione quando la $x$ si avvicina ad un determinato valore. Spesso è un valore in cui la funzione non esiste in $\mathbb{R}$ o comunque ha un comportamento particolare.
Tra le applicazioni più importanti si hanno:

- Determinazione degli asintoti di una funzione
- Definizione e calcolo delle derivate
- Determinazione di continuità e discontinuità di una funzione

Per quanto riguarda la definizione, essa varia a seconda che la $x$ tenda ad un valore finito o infinito e cambia anche in relazione al risultato del limite che può essere, pure quello, finito o infinito.
Nei prossimi paragrafi, saranno riportate tutte le definizioni dei limiti nei vari casi

## Anticipazioni sul calcolo del limite

Il calcolo del limite si dovrebbe studiare DOPO aver studiato la definizione.
In pratica però è utile sapere come si calcola un limite perché può essere d'aiuto per capire meglio la definizione stessa di limite e anche perché, salvo le forme indeterminate che si vedranno più avanti, il calcolo di un limite è molto facile.
Basta sostituire infatti alla $x$ della funzione il valore a cui essa tende.
Ecco il perché di questa anticipazione sul calcolo dei limiti che comunque verrà ripreso e sviluppato più diffusamente nei paragrafi che seguono

| | |
|---|---|
| Sia dato da calcolare il limite a lato | $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x - 1}$ |
| Per calcolare questo limite, basta sostituire alla $x$ il valore a cui essa tende.<br>In questo caso perciò, al posto della $x$ si sostituisce 2 | $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x - 1} = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 1}{3 \cdot 2 - 1} = -\frac{1}{5}$ |
| Come si vede, il limite vale $-\frac{1}{5}$.<br>Ma questo, cosa significa? | Significa che, man mano che la $x$ si avvicina a 2, la $y$ si avvicina indefinitamente a $-\frac{1}{5}$<br>In altre parole: man mano che la $x$ tende a 2, la $y$ tende a $-\frac{1}{5}$ |

Nelle prossime schede, saranno riportate le definizioni di tutti i limiti e a seguire alcuni esempi

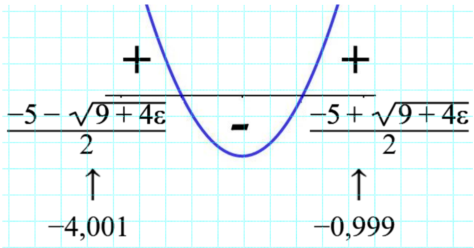
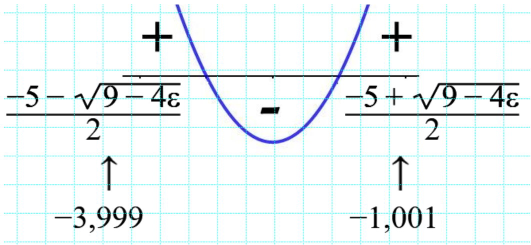
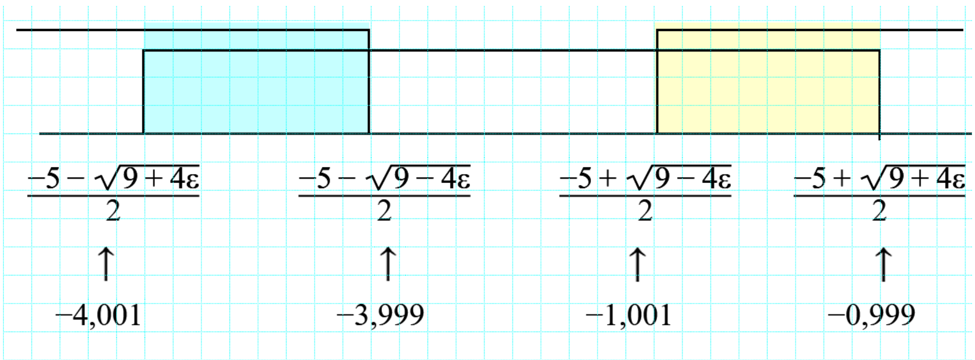
**Limite per $x$ che tende ad un valore finito il cui risultato è un valore finito**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Valore finito $x_0$

Valore finito $l$

| | |
|---|---|
| Sia $f$ una funzione definita in R e $x_0$ un suo punto di accumulazione*.<br>**DEFINIZIONE**<br>*Si dice che la funzione $f(x)$ tende ad un valore finito $l$ (o ha per limite $l$ o converge a $l$) per $x \to x_0$ e si scrive*<br>$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$<br>*se, scelto a piacere un numero $\varepsilon > 0$ piccolo quanto si vuole, è possibile determinare un intorno $I$ di $x_0$ tale che, per qualunque $x$ appartenente a questo intorno, risulti verificata la disequazione* $\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$<br>***Punto di accumulazione**<br>Un punto $x_0$ appartenente ad un insieme reale A, si dice di **accumulazione** se, preso un qualunque intorno completo di esso, esiste ALMENO un punto $x_1$ interno ad A, diverso da $x_0$. | $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$<br>Verifica<br>$\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$<br>Disequazione che si può anche scrivere:<br>$\begin{cases} f(x) - l < \varepsilon \\ f(x) - l > -\varepsilon \end{cases}$ |
| Esempio.<br>Calcolare il limite a lato e fare la verifica del risultato, applicando la definizione | $\lim_{x \to -1} \left(x^2 + 5x + 7\right)$ |
| Per prima cosa, occorre sostituire $-1$ al posto della $x$ | $\lim_{x \to -1} \left(x^2 + 5x + 7\right) = +1 - 5 + 7 = 3$ |
| Così facendo si è appurato che questo limite dà come risultato 3. Per fare la verifica, si applica la definizione. | $\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$<br>$\left\lvert x^2 + 5x + 7 - 3 \right\rvert < \varepsilon \to \left\lvert x^2 + 5x + 4 \right\rvert < \varepsilon$ |
| A questo punto si risolve il sistema e si vede se effettivamente tale sistema è verificato in un intorno di $-1$ | $\begin{cases} x^2 + 5x + 4 < \varepsilon \\ x^2 + 5x + 4 > -\varepsilon \end{cases}$ |

| Segue “Limite per $x$ che tende ad un valore finito il cui risultato è un valore finito” | |
|---|---|
| La prima disequazione è verificata dall’intervallo in basso | $x^2+5x+4-\varepsilon<0$<br>$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot(4-\varepsilon)}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{9+4\varepsilon}}{2}$<br><br><br>$-4{,}001<x<-0{,}999$ |
| Si procede in modo analogo con la seconda disequazione del sistema. Anche qua la soluzione è data dall’intervallo in basso | $x^2+5x+4+\varepsilon>0$<br>$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-4(4+\varepsilon)}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{9-4\varepsilon}}{2}$<br><br><br>$x<-3{,}999$<br>$x>-1{,}001$ |
| I risultati ottenuti si mettono insieme nel grafico del sistema | <br><br>Il sistema è verificato dagli intervalli individuati dalle zone colorate. Quella gialla rappresenta, come si vede, un intorno di $-1$ e quindi si può dire che il limite, nell’intorno di $-1$, è verificato.<br>Il fatto che ci sia anche un’altra soluzione, precisamente in corrispondenza di un intorno di $-4$, significa che anche per $x\to-4$ il limite della funzione data vale 3, come si può facilmente verificare<br>$\lim\limits_{x\to-4}\left(x^2+5x+7\right)=+16-20+7=3$ |

**Limite per $x$ che tende ad un valore finito il cui risultato è $+\infty$**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Valore finito $x_0$

+ Infinito→ $+\infty$

Sia $f$ una funzione definita in R e $x_0$ un suo punto di accumulazione.

**DEFINIZIONE**

*Si dice che la funzione $f(x)$ tende a più infinito (o ha per limite $+\infty$ o diverge positivamente) per $x \to x_0$ e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

*Se, scelto a piacere un numero $M>0$ grande quanto si vuole, è possibile determinare un intorno $I$ di $x_0$ tale che per qualunque $x$ di questo intorno, risulti verificata la disequazione $f(x) > M$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Verifica

$$f(x) > M$$

**Limite per $x$ che tende ad un valore finito il cui risultato è $-\infty$**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Valore finito $x_0$

$-$ Infinito→ $-\infty$

Sia $f$ una funzione definita in R e $x_0$ un suo punto di accumulazione.

**DEFINIZIONE**

*Si dice che la funzione $f(x)$ tende a meno infinito (o ha per limite $-\infty$ o diverge negativamente) per $x \to x_0$ e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

*Se, scelto a piacere un numero $M>0$ grande quanto si vuole, è possibile determinare un intorno $I$ di $x_0$ tale che per qualunque $x$ di questo intorno, risulti verificata la disequazione $f(x) < -M$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Verifica

$$f(x) < -M$$

**Limite per $x$ che tende $+\infty$ il cui risultato è un valore finito**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

+ infinito

Valore finito $l$

**DEFINIZIONE**

*Si dice che la funzione $f(x)$ tende ad un valore finito $l$ (o ha per limite $l$ o converge a $l$) per $x \to +\infty$ e si scrive*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

*Se, scelto un numero piccolo a piacere $\varepsilon$, è possibile determinare un numero $K>0$ grande quanto si vuole, tale che per qualunque $x>K$ risulti verificata la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Verifica

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

**Limite per $x$ che tende $-\infty$ il cui risultato è un valore finito**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

− infinito

Valore finito $l$

**DEFINIZIONE**

*Si dice che la funzione $f(x)$ tende a un valore finito $l$ (o ha per limite $l$ o converge a $l$) per $x \to -\infty$ e si scrive*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

*Se, scelto un numero piccolo a piacere $\varepsilon$, è possibile determinare un numero $K>0$ grande quanto si vuole, tale che per qualunque $x<-K$ risulti verificata la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Verifica

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

**Limite per $x$ che tende $+\infty$ il cui risultato è $+\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

+ infinito → $x \to +\infty$; +infinito → $+\infty$

**<u>DEFINIZIONE</u>**

*Si dice che la funzione $f(x)$ tende a più infinito (o ha per limite $+\infty$ o diverge positivamente) per $x \to +\infty$ e si scrive*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

*Se, scelto un numero $M$>0 grande a piacere è possibile determinare un numero $K$>0 grande quanto si vuole, tale che per qualunque $x$>$K$ risulti verificata la disequazione $f(x) > M$*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Verifica

$$f(x) > M$$

**Limite per $x$ che tende $+\infty$ il cui risultato è $-\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

+ infinito → $x \to +\infty$; -infinito → $-\infty$

**<u>DEFINIZIONE</u>**

*Si dice che la funzione $f(x)$ tende a meno infinito (o ha per limite $-\infty$ o diverge negativamente) per $x \to +\infty$ e si scrive*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

*Se, scelto un numero $M$>0 grande a piacere è possibile determinare un numero $K$>0 grande quanto si vuole, tale che per qualunque $x$>$K$ risulti verificata la disequazione $f(x) < -M$*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Verifica

$$f(x) < -M$$

**Limite per $x$ che tende $-\infty$ il cui risultato è $+\infty$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- infinito

+infinito

**DEFINIZIONE**

*Si dice che la funzione $f(x)$ tende a più infinito (o ha per limite $+\infty$ o diverge positivamente) per $x \to -\infty$ e si scrive*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

*Se, scelto un numero $M$>0 grande a piacere è possibile determinare un numero $K$>0 grande quanto si vuole, tale che per qualunque $x$<-$K$ risulti verificata la disequazione $f(x) > M$*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Verifica

$$f(x) > M$$

**Limite per $x$ che tende $-\infty$ il cui risultato è $-\infty$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- infinito

-infinito

**DEFINIZIONE**

*Si dice che la funzione $f(x)$ tende a meno infinito (o ha per limite $-\infty$ o diverge negativamente) per $x \to -\infty$ e si scrive*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

*Se, scelto un numero $M$>0 grande a piacere è possibile determinare un numero $K$>0 grande quanto si vuole, tale che per qualunque $x$<-$K$ risulti verificata la disequazione $f(x) < -M$*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Verifica

$$f(x) < -M$$

## Limite destro e limite sinistro di una funzione

Si parla di limite destro e sinistro, quando la $x$ tende a $x_0$ per valori leggermente maggiori o leggermente minori di quest'ultimo (valori di un intorno di $x_0$ ). Nel limite si troverà perciò $x \to x_0^+$ oppure $x \to x_0^+$ anziché il generico $x \to x_0$.

$x \to x_0^+$ → significa che si avvicina a $x_0$ per valori leggermente maggiori di $x_0$

$x \to x_0^-$ → si avvicina per valori leggermente minori di $x_0$.

Nel primo caso si dice che tende a $x_0$ da destra, nel secondo caso da sinistra.

Fare questa distinzione è molto importante soprattutto per la determinazione del segno del limite

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \text{limite destro}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \text{limite sinistro}$$

Esempio. Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^+ - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Poiché la $x$ si avvicina a 2 da destra, significa che i valori che assume sono leggermente maggiori di 2. Questo fa sì che il denominatore sia positivo. Il limite perciò ha come risultato finale $+\infty$.

Viceversa se tende a 2 da sinistra:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^- - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

**Esempio sulla verifica di un limite destro**

$$\lim_{x \to 1^+} \left( \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

Il limite dato è riconducibile al secondo caso, perciò:

$$\frac{1}{x-1} > \mathrm{M}$$

Si fa il minimo comune multiplo e poi si studiano separatamente numeratore e denominatore. La quantità $x = \frac{1+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}$ vale poco più di 1. Infatti, scindendo si ottiene:

$$x = \frac{1+\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{1}{\mathrm{M}} + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{1}{\mathrm{M}} + 1$$

Essendo M un numero molto grande, la quantità $\frac{1}{\mathrm{M}}$ vale circa 0. Quindi:

$$x = \frac{1+\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = 1 + 0{,}0000 \ldots 1 = 1{,}00001$$

$$\frac{1-\mathrm{M}(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\frac{1-\mathrm{M}x+\mathrm{M}}{x-1} > 0$$

$$\frac{-\mathrm{M}x+\mathrm{M}+1}{x-1} > 0$$

$N. \quad -\mathrm{M}x+\mathrm{M}+1>0$

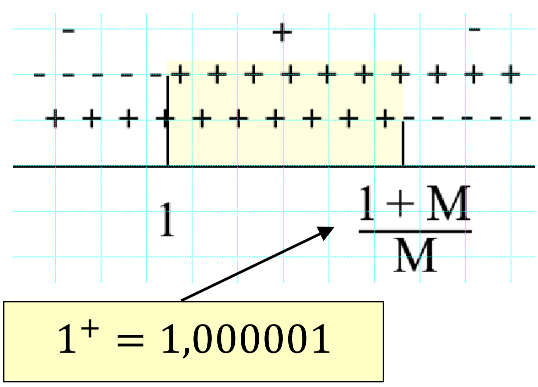
$\quad x < \frac{1+\mathrm{M}}{\mathrm{M}} \to [\text{Vale poco più di } +1]$

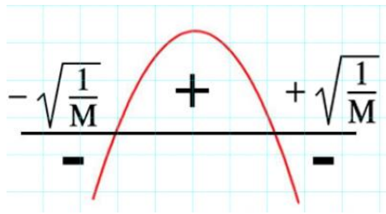
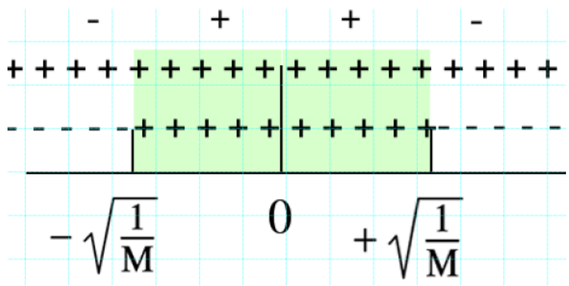
$D. \quad x-1>0 \to x>1$

Fatto lo studio del segno, si evince che la soluzione è data da:

$$\boxed{1 < x < 1^+}$$

La disequazione e quindi il limite, non sono verificati in tutto l'intorno di 1 ma solo in quello destro. È quindi dimostrato che il limite tende a $+\infty$ se $x$ tende a 1 da destra



| **Esercizi sulla verifica di un limite** | |
|---|---|
| Esercizio 1 | |
| Dimostrare l'uguaglianza a lato | $\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ |
| È il caso 2, quindi si impone: $$f(x) > \mathrm{M}$$ Questa disuguaglianza deve essere verificata in un intorno di 0 (zero) | $\frac{1}{x^2} > \mathrm{M}$ |
| Si fa il minimo comune multiplo e si studiano numeratore e denominatore separatamente | $\frac{1 - \mathrm{M}x^2}{x^2} > 0$<br>$N. \quad 1 - \mathrm{M}x^2 > 0$<br>$D. \quad x^2 > 0 \rightarrow$ Sempre per $x \neq 0$ |
| Il numeratore è una disequazione di secondo grado e si risolve normalmente (equazione associata e parabola).<br>Il denominatore, essendo un quadrato, è sempre positivo purché la base sia diversa da zero. | $1 - \mathrm{M}x^2 = 0 \rightarrow \mathrm{M}x^2 = 1$<br>$x^2 = \frac{1}{\mathrm{M}} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}}}$<br><br>$-\sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}}} < x < +\sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}}}$ |
| Facendo lo studio del segno, si vede che la disequazione è verificata proprio in quegli intervalli che costituiscono un intorno di $x_0$.<br>Infatti, le quantità $$-\sqrt{\frac{1}{M}} \ e + \sqrt{\frac{1}{M}}$$ Sono quantità prossime allo zero in quanto $M$ è un numero molto grande.<br>Precisamente, una è vicina allo zero da sinistra (-0,0000000…1) l'altra da destra (+0,00000000…1) | <br>$\boxed{-\sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}}} < x < +\sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}}}}$<br>Intorno di 0. Limite verificato |

## Esercizio 2

Dimostrare l'uguaglianza a lato

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1$$

Si tratta del caso 4, perciò si impone quanto riportato a destra

$$\left|\frac{x}{x-1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{x-1}\right|<\varepsilon \rightarrow \left|\frac{1}{x-1}\right|<\varepsilon$$

Da questa condizione scaturisce un sistema di disequazioni. Si risolvono separatamente le due disequazioni

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}<\varepsilon\\ \dfrac{1}{x-1}>-\varepsilon\end{cases}$$

### Disequazione 1

Come si vede dal grafico "studio del segno", la disequazione è verificata negli intervalli:

$$x<1 \quad \text{e} \quad x>1+\frac{1}{\varepsilon}$$

Poiché $\varepsilon$ è piccolo quanto si vuole (prossimo allo zero), la quantità $+\frac{1}{\varepsilon}$ è molto grande e tende a + infinito.
Un numero fratto zero infatti tende a ∞.
Quindi anche la quantità $1+\frac{1}{\varepsilon}$ tende a + ∞

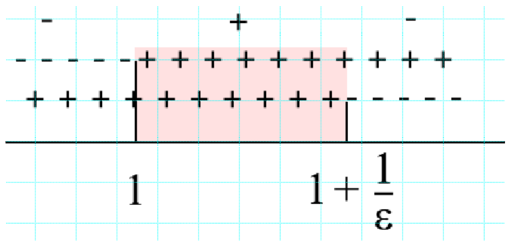
$$\frac{1}{x-1}-\varepsilon<0 \rightarrow \frac{1-\varepsilon x+\varepsilon}{x-1}<0$$

$N.\quad x<1+\frac{1}{\varepsilon}$

$D.\quad x>1$

È stato fatto un cambio di segno e di verso

Studio del segno




### Disequazione 2

Questa disequazione è verificata invece per valori esterni:

$$x<1-\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad x>1$$

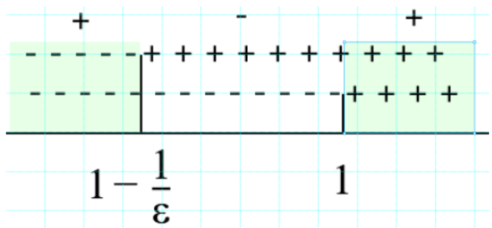
Per lo stesso motivo visto in precedenza, la quantità $-\frac{1}{\varepsilon}$ tende a $-\infty$, quindi tende a $-\infty$ anche la quantità $1-\frac{1}{\varepsilon}$

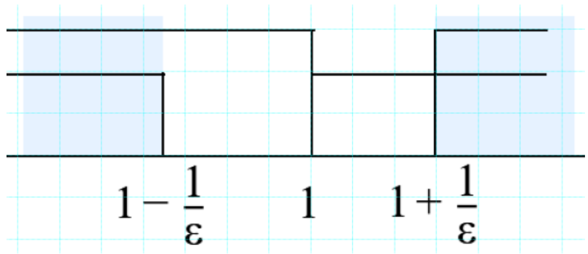
$$\frac{1}{x-1}+\varepsilon>0 \rightarrow \frac{1+\varepsilon x-\varepsilon}{x-1}<0$$

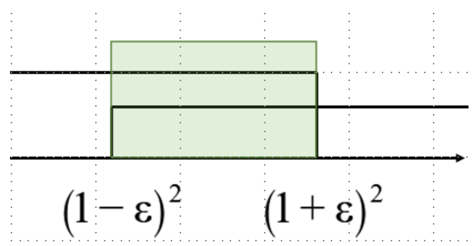
$N.\quad x>1-\frac{1}{\varepsilon}$

$D.\quad x>1$

Studio del segno



| Segue "Esercizio 2" | |
|---|---|
| Si mettono ora insieme i risultati delle due disequazioni nel grafico del sistema | Grafico del sistema<br> |
| È quindi verificata negli intervalli a lato | $x>1+\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow tende\ a\ +\infty$<br>$x<1-\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow tende\ a\ -\infty$<br>La prima disequazione è quella che verifica il limite. Infatti essa dice che tale limite vale 1 se si prendono valori di $x$ maggiori di un numero grandissimo (quindi tendente a infinito)<br>Il secondo numero è un numero che tende a $-\infty$. Il fatto che sia presente anche questa soluzione, fa capire che quel limite, evidentemente, vale 1 anche se la $x$ tende a $-\infty$ |

| Esercizio 3 | |
|---|---|
| Dimostrare il limite a lato | $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$ |
| È il primo caso perciò si opera come riportato qui a fianco | $\lvert f(x)-l\rvert<\varepsilon$<br>$\lvert\sqrt{x}-1\rvert<\varepsilon$ |
| Si risolve perciò questo sistema | $\begin{cases}\sqrt{x}-1<\varepsilon\\ \sqrt{x}-1>-\varepsilon\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}<1+\varepsilon\\ \sqrt{x}>1-\varepsilon\end{cases}$<br>$\begin{cases}x<(1+\varepsilon)^2\\ x>(1-\varepsilon)^2\end{cases} \qquad \text{con } x\geq 0$ |
| Dal grafico si evince che la soluzione è data dall'intervallo<br>$(1-\varepsilon)^2<x<(1+\varepsilon)^2$<br>Che è un intorno di 1. Il limite quindi è verificato |  |

| Verificare i seguenti limiti | | |
|---|---|---|
| $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}$ | $\lim_{x\to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty$ | $\lim_{x\to +\infty} \left(x^2 - 3x\right) = +\infty$ |
| $\lim_{x\to 0^+} (\ln x) = -\infty$ | $\lim_{x\to 2} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{3}\right) = 0$ | $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + 1) = 2$ |