Studio del segno di una funzione: PREMESSA

Prima dello Studio del segno o positività di una funzione è utile calcolare le sue intersezioni con gli assi cartesiani.
Si potrebbero anche non calcolare e ricavarle dal grafico ma trovarle algebricamente è…meglio!

Intersezione con gli assi cartesiani

Per trovare le intersezioni con gli assi di una funzione, si mette a sistema la sua equazione con l'asse x (y =0) e poi con l'asse y (x =0) (o viceversa).

I punti ottenuti (se ce ne sono), sono quei punti appartenenti agli assi cartesiani per i quali passa la funzione (e che quindi appartengono anche alla funzione).
Di seguito un esempio con la funzione:

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2 - x - 12}{x + 6}}$$

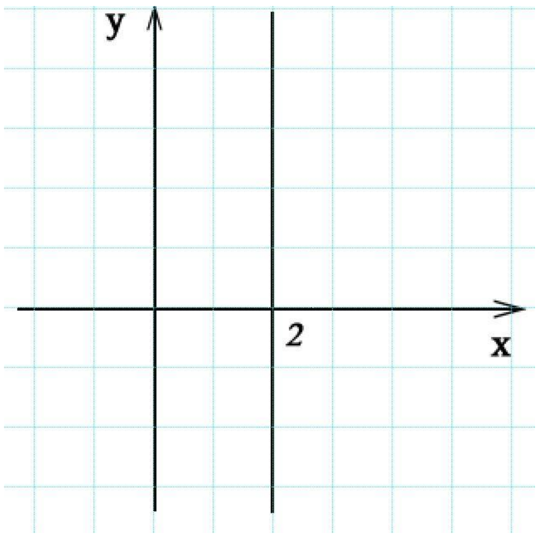
Intersezione asse x	Intersezione asse y
$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - x - 12}{x+6} \\ y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - x - 12}{x+6} \\ x = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 12}{\cancel{x+6}^{\,1}} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y = \dfrac{-12}{+6} = -2 \\ x = 0 \end{cases}$
$x^2 - x - 12 = 0$ $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ $x_1, x_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$ $x_1, x_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2}$ $x_1 = \dfrac{1-7}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3$ $x_2 = \dfrac{1+7}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$	Quindi la funzione incontra l'asse y nel punto $A(0; -2)$ **Nota importante**. I valori trovati naturalmente devono essere compatibili con le condizioni del campo di esistenza
Quindi la funzione incontra l'asse x nei punti $B(-3;0) \quad C(4;0)$	

Studio del segno o positività di una funzione

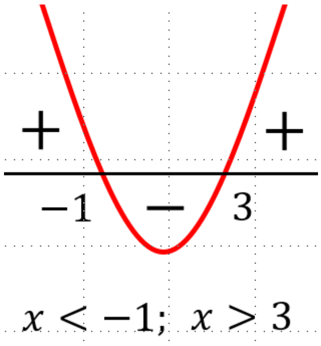
Studiare il segno di una funzione, significa individuare quelle parti di piano in cui la funzione si trova tutta al di sopra o tutta al di sotto dell'asse x.

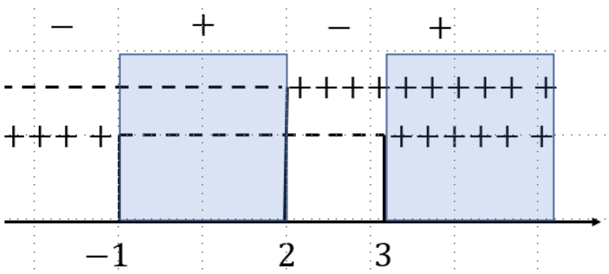
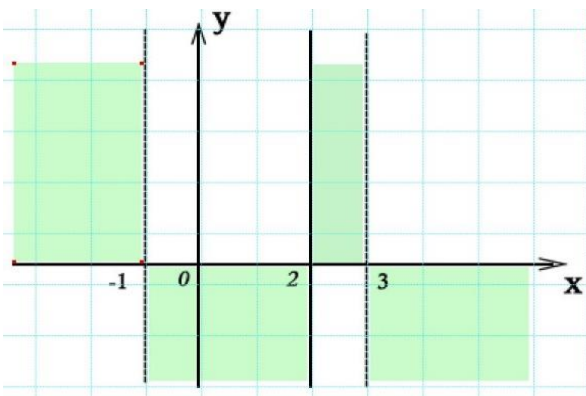
Per determinarle si impone la funzione maggiore di zero e si risolve la disequazione che ne deriva.
Una volta risolta, si controllano i segni e si opera come segue:
Laddove la funzione è positiva si cancella la parte di piano che si trova sotto l'asse x, dove invece è negativa si cancella la parte di sopra.

Naturalmente si parla di parti di piano in cui la funzione esiste, cioè di intervalli appartenenti al campo di esistenza

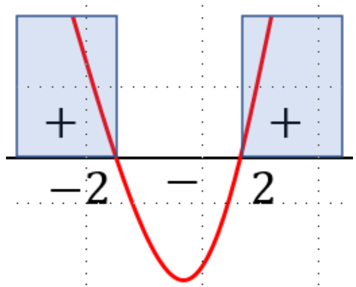
Esempio 1	
La funzione a fianco è una funzione razionale fratta	$y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$
Prima di tutto si trova il campo di esistenza. Essendo una funzione fratta si impone il denominatore diverso da zero	$x - 2 \neq 0 \ \rightarrow \ x \neq 2$ Quindi il C.E. si può anche scrivere: $-\infty < x < 2; \quad 2 < x < +\infty$
Si consiglia di riportare subito sul grafico generale della funzione, il risultato ottenuto. Essendo 2 l'unico valore da escludere dal C.E. si traccia una linea continua in corrispondenza della retta x =2	
A questo punto si impone la funzione maggiore di zero. Si risolvono separatamente numeratore e denominatore completando con il grafico (vedi disequazioni fratte).	$\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} > 0$

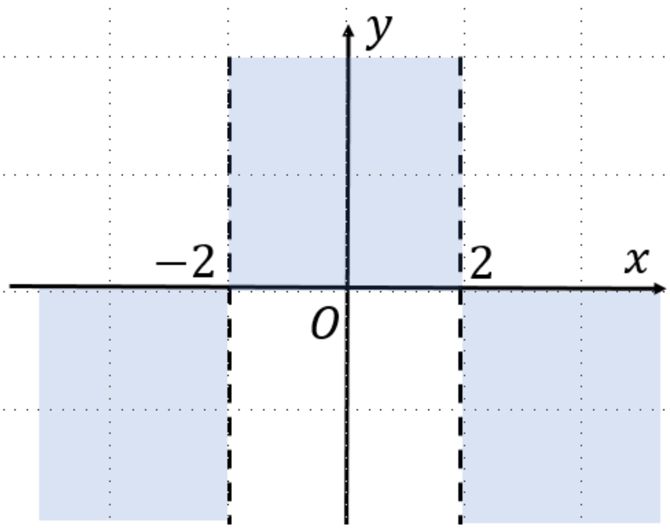
<table>
<tr><th colspan="2">Segue “Esempio” 1</th></tr>
<tr><td>Essendo il numeratore una disequazione di secondo grado è stata risolta utilizzando la parabola.

Il denominatore invece è una disequazione di primo grado e si risolve lasciando la x al primo membro e trasportando la parte numerica al secondo membro.</td>
<td>NUMERATORE
$x^2-2x-3>0 \rightarrow x^2-2x-3=0$
$x_1, x_2 = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a}$
$x_1, x_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = 1 \pm \sqrt{4}$
$x_1 = 1-2 = -1$
$x_2 = 1+2 = 3$


DENOMINATORE
$D.\ x-2>0 \longrightarrow x>2$</td></tr>
<tr><td>Si confrontano i segni di numeratore e denominatore (grafico).
Come si può constatare la funzione è
Positiva per
$-1<x<2$ e $x>3$
Negativa per
$x<-1$ e $2<x<3$</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>Quindi, tornando al grafico principale, si cancellano le parti di piano che si trovano sotto l’asse x negli intervalli
$-1< x <2$ e $x >3$
mentre negli intervalli
$x <-1$ e $2< x <3$
Si cancellano le parti di piano che si trovano sopra l’asse x</td>
<td>
</td></tr>
</table>

Nota. La positività fornisce importanti indicazioni per tracciare il grafico della funzione. Grazie ad essa infatti, si stanno escludendo intere parti di piano per le quali la funzione non passa

<table>
<tr><th colspan="2">Esempio 2</th></tr>
<tr><td>Determinare la positività della funzione a lato</td><td>Funzione razionale intera
$$y=\sqrt[3]{x^2+4}-2$$</td></tr>
<tr><td>Il campo di esistenza è tutto R in quanto si tratta di una funzione irrazionale in cui la radice ha indice dispari.
Tralasciando le intersezioni con gli assi, si procede determinando gli intervalli di positività e negatività (studio del segno)</td><td>$$y>0$$
$$\sqrt[3]{x^2+4}-2>0$$
$$\sqrt[3]{x^2+4}>2\rightarrow\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^3>(2)^3$$
$$x^2+4>8\rightarrow x^2+4-8>0$$
$$x^2-4>0\rightarrow x^2-4=0$$
$$x^2=4\rightarrow x=\pm2$$


$$x<-2;\quad x>+2$$</td></tr>
<tr><td>La funzione è positiva per valori esterni: $x<-2$ e $x>+2$. In questi intervalli perciò si cancella la parte sottostante l'asse x (vedi grafico a lato).
La funzione è invece negativa per valori interni $-2<x<2$.
In questo intervallo perciò si cancella la parte sopra l'asse x</td><td>
</td></tr>
</table>